

J'apprends les

CM2

maths

**GUIDE
PÉDAGOGIQUE**

Sous la direction de

RÉMI BRISSIAUD

Maitre de conférences de psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS

Professeur agrégé

PIERRE CLERC

Instituteur

FRANÇOIS LELIÈVRE

Professeur des écoles

LUC TIENNOT

Formateur à l'Espé de La Réunion

RETZ

www.editions-retz.com

9 bis, rue Abel Hovelacque

75013 Paris

Sommaire

Présentation	3
<hr/>	
Chap. 1 <i>Le progrès en arithmétique :</i> continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne	5
Chap. 2 <i>L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes :</i> quatre attitudes pédagogiques	15
Chap. 3 <i>Enseigner la division euclidienne</i>	28
Chap. 4 <i>Les fractions et les décimaux au CM1 :</i> une nouvelle approche	39
Chap. 5 <i>Proportionnalité, conversions et décimaux au CM2</i>	53
Guide pédagogique	63
<hr/>	
7 conseils pour bien utiliser J'apprends les maths CM2	64
Les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC)	65
Période rouge (p. 14 à p. 55 folio élève)	68
Période jaune (p. 56 à p. 89 folio élève)	108
Période verte (p. 90 à p. 133 folio élève)	138
Période bleue (p. 134 à p. 165 folio élève)	180
Planches	214
Bibliographie	224
<hr/>	

© Retz, 2017
ISBN : 978-2-7256-3532-3

Direction éditoriale : Céline Lorcher
Édition : Anne-Sophie Perret
Correction : Gérard Tassi
Maquette : Anne-Danielle Naname
Mise en page : STDI
Illustrations : Sébastien Chebret



Cet ouvrage suit l'orthographe recommandée par les rectifications de 1990 et les programmes scolaires. Voir le site <http://www.orthographe-recommandee.info> et son miniguide d'information

Présentation

Depuis l'édition précédente de *J'apprends les maths CM2*, de nouveaux programmes pour la rentrée 2016 ont été publiés et une Conférence de consensus, qui s'est tenue en 2015, a émis des recommandations concernant les apprentissages numériques à l'école élémentaire. Les choix didactiques de la collection et notamment ceux de *J'apprends les maths CM2* s'en sont trouvés confortés.

Rappelons quelques choix pédagogiques qui, dès l'origine, ont été ceux de *J'apprends les maths* :

- les élèves apprennent dès le CM1 la résolution des problèmes de proportionnalité en calculant la valeur de l'unité (stratégie qui, souvent, est improprement appelée : « règle de trois ») ;
- en CM2, les élèves apprennent même à « pousser une division après la virgule » (cela conforte une bonne compréhension des nombres décimaux).

Par ailleurs, certains choix pédagogiques de *J'apprends les maths* sont aujourd'hui confortés par la recherche scientifique. C'est le cas notamment de la distinction de deux types de stratégies de résolution de problèmes : la « résolution par simulation de la situation » et la « résolution arithmétique ». Les pages « Problèmes pour apprendre à chercher » contribuent largement à faire comprendre cette distinction.

La progression de *J'apprends les maths* concernant les nombres décimaux est un des points forts de la collection. Les fractions sont en effet abordées avant les décimaux et, de plus, le sens « division » des fractions est abordé en premier (13/10 se lit d'abord : « 13 divisé par 10 », avant de se lire « 13 dixièmes »). Les raisons de tels choix sont exposées ci-dessous, après avoir abordé le thème de la division.

Cette présentation comporte deux parties : les chapitres 1 à 4 qui, à quelques détails près, figuraient déjà dans le guide pédagogique de CM1, et le chapitre 5 qui est original et spécifique au CM2. Du fait que ce CM2 se situe dans la continuité pédagogique du CM1, nous recommandons évidemment la lecture des premiers chapitres.

Les questions abordées dans cette présentation sont, par exemple : comment un enfant apprend-il que le problème « *Éric a 37 billes. Il gagne des billes et il en a 61. Combien en a-t-il gagnées ?* » peut être résolu par une soustraction, alors qu'Éric a gagné des billes ? Ou encore : comment un enfant apprend-il que le problème « *On dispose de 1 243 stylos et on forme des lots de 3 stylos. Combien peut-on en former ?* » se résout par la même opération arithmétique qu'un autre où l'on partage équitablement 1 243 stylos entre 3 personnes ?

Dans le chapitre 1, on montre que les enfants ne s'approprient pas les opérations arithmétiques seulement en continuité avec leur expérience quotidienne. Si l'école ne favorisait pas certaines réorganisations, il est peu probable que les opérations arithmétiques leur seraient accessibles. Dans le chapitre 2, on montre qu'il existe différentes façons de gérer les continuités et les réorganisations qui conduisent aux opérations arithmétiques, et que c'est l'objet d'un débat entre les chercheurs en didactique des mathématiques. La position défendue ici est que l'enseignement des 2 « grands gestes mentaux » du calcul d'une soustraction et celui des 2 « grands gestes mentaux » du calcul d'une division sont fondamentaux parce qu'ils anticipent les réorganisations nécessaires.

On montre ensuite comment ce cadre théorique permet d'élaborer une progression, dans le chapitre 3 concernant la division, et, dans le chapitre 4, concernant les décimaux-fractions.

Dans le chapitre 5, enfin, celui qui est spécifique au CM2, on montre comment les mêmes choix théoriques permettent d'aborder des thèmes comme la proportionnalité, les conversions d'unités de mesures, la division « poussée après la virgule », etc.

Rémi Brissiaud

Chapitre 1

Le progrès en arithmétique : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne

PLAN DU CHAPITRE

- Trois niveaux de résolution d'un même problème.
- La transition du 1^{er} au 2^e niveau se fait dans la continuité.
- L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques.
- Pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ?
- La transition du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne.
- À propos de la notion de « champ conceptuel ».
- Résumé.

Certaines recherches récentes nous renseignent sur le développement des compétences arithmétiques d'enfants qui vivent dans les rues des grandes métropoles sud-américaines et se livrent au commerce de fruits ou de paquets de pop-corn pour subsister. Ces enfants sont donc très peu scolarisés et ils apprennent à partir de la seule résolution des problèmes auxquels ils sont confrontés « dans la rue »¹.

Ces jeunes gens se montrent suffisamment performants pour exercer leur commerce et en tirer un certain bénéfice mais, dans le même temps, leurs compétences arithmétiques présentent des limites qu'il est intéressant d'analyser. Par exemple : si l'un d'eux doit chercher le prix de 10 bananes à 4 cruzeiros la banane, il calculera très vraisemblablement 10 fois 4 par ajout réitéré² : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 (quatre et quatre, huit. Et encore quatre, douze. Et quatre...), comme s'il payait successivement chacune des 10 bananes. Le calcul de 4 fois 10 serait beaucoup plus facile, mais, pour une personne qui construit ses connaissances à partir de la seule expérience quotidienne du commerce de rue, ce calcul correspond à un autre problème que celui qui est posé (Quel est le prix de 4 objets à 10 € l'un ?). Ces jeunes gens ne savent donc pas que 10 fois 4 est égal à 4 fois 10 ; ils ne disposent pas réellement de la multiplication en tant qu'opération arithmétique.

Leur situation est ainsi très différente de celle des enfants scolarisés. Ils ne commettent pas certaines erreurs grossières que l'on observe à l'école, mais, dans le même temps, ils sont dépourvus de certaines connaissances que l'on aurait tendance à croire élémentaires du fait que la quasi-totalité des élèves de CE2 les maîtrisent.

Ce type de recherches montre que les compétences arithmétiques se construisent en partie dans la continuité avec les expériences quotidiennes (pour peu que le quotidien confronte l'enfant à des problèmes numériques), mais aussi, en dehors de ces expériences quotidiennes, et même parfois, comme nous le verrons, en rupture avec elles.

Quand un enfant est scolarisé, l'expérience quotidienne de l'écolier se situe pour une large part à l'intérieur de l'école elle-même. Il n'en reste pas moins que la distinction précédente est éclairante. En effet, l'écolier développe ses compétences arithmétiques en partie parce qu'il est amené, au sein de l'école, à résoudre des problèmes qui simulent ceux de la vie quotidienne (des problèmes d'achat, de vente, par exemple), et en partie parce qu'il bénéficie des apports d'un milieu culturel spécifique, à savoir le milieu scolaire.

Le projet de ce chapitre est de proposer un cadre théorique qui permette de mieux appréhender, parmi les compétences numériques, celles qui se construisent en continuité avec l'expérience quotidienne (qu'elle soit extérieure à l'école ou

1. Les principales de ces recherches ont été menées par Nunes-Carraher et ses collègues auprès de jeunes Brésiliens. On en trouve une synthèse dans Nunes T., « Ethnomathematics and Everyday Cognition » in Douglas, A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 557-574. N.Y. : MacMillan Publishing Company, 1992.

2. Le mot « réitéré » (on aurait pu dire aussi « itératif ») signifie : « qui se répète à l'identique ».

résulte d'une simulation à l'intérieur de l'école), et celles qui sont spécifiques à l'expérience scolaire.

Un tel cadre théorique intéresse évidemment le pédagogue parce qu'il est de sa responsabilité de permettre les continuités et de gérer les ruptures ou les réorganisations nécessaires au progrès des élèves.

La clef de voute de ce cadre théorique est la distinction de divers niveaux de résolution d'un même problème (on en distinguera trois). Le progrès se fait en passant d'un niveau à un autre, évidemment, mais nous verrons que ces passages se font tantôt dans la continuité avec l'expérience quotidienne, tantôt en rupture avec elle. Nous verrons que pour accéder au niveau le plus expert, l'enfant a besoin que l'école rende explicite l'équivalence de deux gestes mentaux³ et que c'est cette équivalence qui, en fait, « fonde » chacune des opérations arithmétiques.

À la fin de ce chapitre, nous présenterons succinctement une notion théorique que G. Vergnaud a introduite et qui peut sembler incompatible avec la perspective adoptée ici : c'est celle de « champ conceptuel ». Nous verrons qu'en fait le projet de recherche de cet auteur et le nôtre sont très proches, même si les moyens utilisés ne sont pas identiques.

Trois niveaux de résolution d'un même problème

L'exemple d'un problème dit de multiplication

Considérons ce problème de « recherche du résultat d'un ajout réitéré » :

Un pépiniériste a planté 10 rangées de 4 peupliers.

Combien a-t-il planté de peupliers ?

Un exemple de procédure du 1^{er} niveau est le suivant : l'enfant débutant dessine une rangée de 4 bâtons, puis une autre, etc. Il agit donc par le dessin comme le pépiniériste est censé l'avoir fait avec ses peupliers. Quand il a représenté tous les arbres, l'enfant compte le nombre total de bâtons.

Au 1^{er} niveau, donc, l'enfant effectue une sorte de mime de l'énoncé, soit avec du matériel, soit en dessinant, soit encore, quand la taille des nombres le permet, en utilisant ses doigts. Il reconstitue ainsi les données du problème avec du matériel ou par le dessin pour simuler les actions décrites dans l'énoncé (quand celui-ci a un aspect dynamique) ou pour expliciter les relations qui y figurent (quand l'énoncé est plus statique⁴).

Décrivons tout de suite le 3^e niveau, qui est aussi le plus expert : c'est celui où l'enfant reconnaît immédiatement, après une pre-

3. On appellera « geste mental » toute action finalisée et intériorisée : se représenter mentalement un ajout réitéré, par exemple, est un geste mental. Cette notion est utilisée par divers auteurs. La Garanderie est de ceux-là, mais il l'utilise dans un sens plus restreint qu'on ne le fait ici parce qu'il considère essentiellement des gestes mentaux de nature méthodologique : faire attention, chercher à mémoriser, etc.

4. « Éric a 17 billes. Il en gagne 29. Combien en a-t-il maintenant ? » est un énoncé dynamique (il décrit une transformation). « Dans la cour d'une école, il a 17 garçons et 29 filles. Combien y a-t-il d'enfants ? » est un énoncé statique (il décrit une relation).

mière lecture de l'énoncé, qu'une opération arithmétique est pertinente. Ici, il reconnaît presque immédiatement qu'il suffit de « faire une multiplication ». Cet enfant a donc construit des catégories d'énoncés : il y a les problèmes de multiplication, de soustraction, de division, de proportionnalité, etc. Chaque catégorie est ainsi indexée par un savoir-faire mathématique : le calcul mental ou en colonnes d'une multiplication, d'une soustraction, etc. Lorsque l'enfant reconnaît le problème comme appartenant à telle ou telle catégorie, il lui suffit de « dérouler » ce savoir-faire mathématique et, sauf erreur de calcul, il obtient ainsi la solution numérique du problème.

On observe évidemment d'autres procédures que les précédentes. Ainsi, pour le problème des peupliers, certains enfants posent une suite d'additions : $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Les procédures de ce type, intermédiaires entre les deux décrites, ont évidemment une grande importance pédagogique : elles témoignent d'un progrès par rapport au mime (l'enfant travaille sur des écritures numériques), tout en restant proche de ce mime : le signe « + » est utilisé ici dans son sens le plus évident, lorsqu'il exprime un ajout. Ce type de procédure reste donc facilement compréhensible. Ce sont ces procédures dont nous dirons qu'elles relèvent d'un deuxième niveau.

En bref, avant d'être un problème de multiplication (3^e niveau), le problème des peupliers est un problème de recherche du résultat d'ajouts identiques répétés. Il se résout soit en simulant ces ajouts (1^{er} niveau), soit par une addition réitérée (2^e niveau).

L'exemple d'un problème dit de soustraction

Considérons ce problème de « recherche de la valeur d'un ajout » :

Éric a 28 billes.

Il va en récréation et il gagne des billes.

Maintenant il a 54 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Au 1^{er} niveau, l'enfant peut s'y prendre ainsi : il commence par dessiner 28 billes, il change ensuite la couleur de son crayon pour bien distinguer ces 28 billes de celles qu'il va maintenant ajouter et il dessine des billes jusqu'à en avoir 54 en tout. Enfin, il compte combien il vient d'ajouter de billes. Au 2^e niveau, l'enfant teste par exemple des hypothèses : « Éric a 28 billes au départ. $28 + 30$ ça fait 58. C'est trop, ce n'est pas 30 billes. $28 + 25$, ça fait 53, c'est plus de 25, il a gagné 26 billes. » Cette procédure, qui peut aussi prendre la forme d'une « addition à trou », reste très proche d'une simulation de l'action décrite dans l'énoncé. On remarquera notamment que le signe « + » y est employé dans un sens trivial, comme synonyme de « gagner ».

Enfin, au 3^e niveau, l'enfant, après une première lecture de l'énoncé, reconnaît presque immédiatement ce problème comme appartenant à la catégorie des problèmes de soustraction et il calcule $54 - 28$.

En bref, avant d'être un problème de soustraction (3^e niveau), le problème d'Éric et ses billes est donc un problème de recherche de la valeur d'un ajout. Il se résout soit en simulant cet ajout (1^{er} niveau), soit par une addition à trou (2^e niveau).

L'exemple d'un problème dit de division

Enfin, considérons un dernier exemple avec ce problème de groupement réitéré (recherche du nombre de groupes et du nombre d'éléments qui restent isolés)⁵ :

On a 935 paquets de gâteaux et on va former des lots de 4 paquets.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des paquets ?

Il est évidemment fastidieux de dessiner 935 items représentant des paquets de gâteaux, mais on imagine facilement ce que serait, si la taille des nombres l'autorisait, une résolution au 1^{er} niveau : l'enfant dessinerait par exemple autant de rectangles qu'il y a de paquets de gâteaux, avant d'entourer des groupes de 4 et de compter ces groupes.

En revanche, ce type de problème conduit à diverses procédures relevant du 2^e niveau. Ainsi, l'enfant peut s'imaginer en train de former les lots tout en tenant le compte du nombre de paquets utilisés. Il est ainsi conduit à amorcer une suite d'additions : $4 + 4 = 8$, $4 + 4 + 4 = 12$, etc. Comme c'est encore très long, il peut être conduit à former directement 10 lots, ce qui correspond à 40 paquets, encore 10 lots, 80 paquets, encore 10 lots, etc. Il aura évidemment intérêt à former directement 100 lots, ce qui correspond à 400 paquets. Finalement, il trouvera la solution en effectuant des additions successives de multiples de 4 et en contrôlant à chaque étape que la somme de ces multiples reste inférieure à 935. Une autre possibilité consiste à s'imaginer en train de former les lots tout en tenant le compte des paquets restants (et non, comme c'était le cas dans la procédure précédente, de ceux qui ont été utilisés). L'enfant est ainsi conduit à effectuer une suite de soustractions : $935 - 4 = 931$, j'ai formé 1 lot. $931 - 4 = 927$, j'en ai formé 2. Encore une fois, cette procédure étant fastidieuse, l'enfant est conduit à imaginer la formation simultanée de 10 lots et à faire la suite de soustractions : $935 - 40 = 895$, $895 - 40 = 855$... La formation directe de 100 lots permet évidemment d'aller plus vite encore. Finalement, la solution s'obtient en effectuant une suite de soustractions de multiples de 4, cette solution étant d'autant plus rapide que la taille des multiples prélevés est grande.

Une autre possibilité, enfin, consiste à tester des hypothèses. Peut-on former 200 lots ? $4 \times 200 = 800$: oui, on a largement assez de gâteaux. Et 500 lots ? $4 \times 500 = 2\,000$. C'est impossible. Et 300 ? Et 250 ?

Toutes ces procédures restent proches de la simulation de la formation des lots et ressortent du 2^e niveau.

Au 3^e niveau, après une première lecture de l'énoncé, l'enfant reconnaît ce problème comme appartenant à la catégorie des problèmes de division et il cherche le quotient et le reste de la division $935 : 4$?.

Là encore, résumons : avant d'être un problème de division (3^e niveau), le problème des paquets de gâteaux consiste à rechercher les résultats d'un groupement réitéré (nombre de groupes ? nombre d'éléments isolés restants ?). Ce problème se résout soit en simulant les groupements (1^{er} niveau), soit par une suite d'opérations qui peuvent être des additions, des soustractions ou des encadrements par des multiples (2^e niveau).

La transition du 1^{er} au 2^e niveau se fait dans la continuité

De manière très générale, donc, on peut distinguer trois niveaux dans les procédures qui permettent de résoudre un même problème. La résolution à l'aide d'une opération arithmétique n'est qu'une des procédures possibles, c'est la plus experte.

Nous avons intentionnellement qualifié chacun des problèmes qui nous ont servi d'exemples de problème *dit* de multiplication, *dit* de soustraction, *dit* de division, pour bien souligner qu'ils peuvent tous être résolus au 1^{er} niveau sans aucune connaissance des opérations arithmétiques correspondantes, en faisant seulement appel à la compréhension du langage quotidien et en simulant les actions ou les relations présentes dans l'énoncé, comme le font les enfants brésiliens qui commercent dans la rue.

Il est très important que les pédagogues sachent décrire les problèmes en terme d'actions ou de relations présentes dans l'énoncé : recherche du résultat d'un retrait, recherche de la valeur d'un ajout, recherche du nombre de groupes et du reste d'un groupement réitéré, etc. C'est, en effet, ce type de description qui leur permet de connaître les procédures de 1^{er} niveau, celles que les élèves débutants utilisent.

Il est très important également que les pédagogues ne se leurrent pas sur le niveau de connaissance atteint par un élève qui résout un problème au 2^e niveau. Un élève qui résout un problème de recherche de la valeur d'un ajout (« Farid a 43 billes, il gagne des billes et après il en a 61 », par exemple) à l'aide de l'addition à trou : $43 + 18 = 61$, ne dessine plus, il se met à utiliser le symbolisme arithmétique (dans l'égalité précédente, on voit les signes + et =) et les pédagogues pourraient être tentés de considérer cela comme un progrès crucial.

En fait, un élève qui écrit l'égalité $43 + 18 = 61$ pour résoudre le problème de Farid et ses billes fait fonctionner le signe + comme une simple abréviation sténographique du verbe « gagne ». Il s'agit d'un usage banal de ce signe : c'est le langage ordinaire qui continue à fonctionner sous les habits du symbolisme arithmétique.

C'est ainsi que diverses recherches⁶ montrent que l'ensemble des élèves, dès le CP, savent apparier une telle addition à trou

5. Le mot « réitéré » est utilisé ici pour rappeler que chaque groupe contient le même nombre d'unités et que le groupement se poursuit jusqu'à ce que l'on ne puisse plus former un nouveau groupe. Par ailleurs, on remarquera que la solution d'un tel problème est constituée d'un couple de nombres : le nombre de groupes mais aussi le nombre d'objets qui resteront éventuellement isolés.

6. On pourra notamment se reporter à Carey, D. A., « Number Sentences : Linking Addition and Subtraction Word Problems and Symbols », *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 266-280 (1991).

à un problème de recherche de la valeur d'un ajout comme celui de Farid et ses billes. Or, au CM2, tous les élèves ne savent pas encore apparier une soustraction à ce même type de problème (il y a 20 % d'échec environ) et l'on comprend pourquoi : le fait que Farid gagne des billes n'incite guère à utiliser une soustraction ! Le passage du 1^{er} au 2^e niveau de résolution offre donc beaucoup moins de difficulté que le passage du 2^e au 3^e niveau.

Il est vrai que dans les résolutions au 2^e niveau, les élèves utilisent le symbolisme arithmétique qui leur a été enseigné et que le passage du 1^{er} au 2^e niveau correspond donc à un changement dans la forme de l'expression (ce qui justifie la distinction de deux niveaux différents), mais c'est la continuité qui domine quant au mode de résolution : aux deux premiers niveaux, c'est la compréhension du langage quotidien et la simulation des actions ou des relations présentes dans l'énoncé qui conduisent à la solution.

Il en va tout autrement des résolutions au 3^e niveau qui, comme nous allons le voir, sont les seules à témoigner réellement d'un accès aux concepts arithmétiques de multiplication, de soustraction et de division.

L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques

Le cas de la multiplication

Considérons ces deux problèmes de « Recherche du résultat d'un ajout réitéré » :

Combien coutent 2 livres à 17 € l'un ?

et

Combien coutent 17 livres à 2 € l'un ?

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant 17×2 .

Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la multiplication. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau. Il calculera donc 2 fois 17 ($17 + 17$) dans un cas et 17 fois 2 ($2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$) dans l'autre. Rien ne peut lui laisser prévoir qu'il trouvera le même nombre. Si, dans le premier cas, il calcule $17 + 17$ et si, dans l'autre cas, il compte de 2 en 2 en levant successivement 17 doigts (2, 4, 6, 8...), on ne voit pas ce qui lui permettrait d'anticiper qu'il trouvera le même résultat⁷.

L'équivalence de ces deux gestes mentaux (je vais calculer 2 fois 17 dans un cas, 17 fois 2 dans l'autre) n'a donc rien d'évident *a priori* et pourtant c'est elle qui fonde la multiplication en tant qu'opération arithmétique.

Essayons d'expliquer cet usage du mot « fonde », parce qu'il peut paraître plutôt abstrait. La multiplication est évidemment une création culturelle (certains indices laissent notamment penser que les peuples sans écriture ne possèdent pas la multiplication⁸). Or, c'est l'équivalence des deux gestes mentaux précédents qui, parce qu'elle est source d'économie cognitive, justifie cette création culturelle. Deux raisons peuvent être avancées qui expliquent un phénomène d'économie cognitive.

En premier lieu, cette économie peut résulter de la substitution d'un geste mental à l'autre. Donnons un exemple en envisageant le cas d'une personne qui doit résoudre le problème suivant : *Combien coutent 17 livres à 2 € l'un ?* Il se représentera facilement la situation décrite en la simulant mentalement sous la forme *17 fois 2* ($2 + 2 + 2 + \dots$). Mais c'est bien long de compter autant de 2 ! Aussi, pour obtenir la solution numérique, aura-t-il intérêt à calculer *2 fois 17*. Ce faisant, il résout le problème « *Combien coutent 17 livres à 2 € l'un ?* » comme s'il s'agissait du problème « *Combien coutent 2 livres à 17 € l'un ?* ». Cette personne substitue ainsi un geste mental à l'autre parce que la solution numérique lui apparaît plus directement accessible.

En second lieu, il y a économie cognitive lorsqu'une ou plusieurs autres procédures (algorithme écrit, un certain usage de la calculette, par exemple) ont été associées aux deux gestes équivalents et peuvent se substituer à eux : dans ce cas, aucun des deux gestes mentaux n'est utilisé parce que c'est un automate, par exemple, qui prend en charge l'obtention de la solution numérique. On passe ainsi de deux façons de faire à une seule : il y a regroupement, il y a catégorisation, il y a économie.

C'est parce qu'une culture a intérêt à ne pas laisser se perdre de tels phénomènes d'économie cognitive que cette équivalence a été dument étiquetée par une étiquette verbale (cette étiquette est le signe écrit « \times » et le mot « multiplication »), parce qu'ainsi la rencontre de l'un des deux gestes rappelle immédiatement l'autre (via l'étiquette), ce qui favorise notamment la substitution d'un geste mental à l'autre.

Le cas de la soustraction

Considérons les deux problèmes suivants :

a) Recherche de la valeur d'un ajout

Éric a 3 billes. À la récréation, il gagne des billes.

Maintenant il a 21 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

b) Recherche du résultat d'un retrait

Éric a 21 billes. À la récréation, il perd 3 billes.

Combien a-t-il de billes maintenant ?

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant $21 - 3$.

7. L'égalité des résultats traduit la propriété de la multiplication que l'on appelle commutativité.

8. Voir, par exemple, Goody, J., *La Raison graphique*, Paris, Les Éditions de Minuit (1979).

Mais considérons le cas d'un enfant de CE1, par exemple, qui n'a pas encore étudié la soustraction. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau.

Dans le cas du premier problème, il cherchera ce qu'il faut ajouter à 3 pour avoir 21. S'il utilise une stratégie de comptage sur les doigts pour simuler le gain, l'enfant dira : 3 (quantité initiale de billes), puis il comptera successivement sur ses doigts 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, tout en tenant le compte du nombre de doigts qu'il a ainsi levés, 18, qui constitue la solution numérique⁹. Avec cette stratégie, donc, l'enfant avance sur la suite des nombres. Pour résoudre le second problème, en revanche, il est plus probable que pour simuler la perte des 3 billes, l'enfant recule sur la suite des nombres : 21 billes en tout, 20 (1 bille est enlevée), 19 (2 billes sont enlevées), 18 (3 billes sont enlevées). L'enfant avance sur la suite des nombres dans le premier cas, il recule dans le second. On conçoit qu'il ne lui soit guère facile de prévoir que ces deux procédures produisent le même résultat et, plus généralement, de comprendre qu'elles sont équivalentes. Or c'est cette équivalence qui fonde le concept arithmétique de soustraction parce qu'elle est, comme dans le cas de la multiplication, à l'origine d'une économie cognitive considérable.

Le premier problème illustre bien ce phénomène d'économie cognitive car le geste mental qu'il suscite (avancer sur la suite des nombres depuis 3 jusqu'à 21) est plutôt long et pénible, et cela procure une économie cognitive substantielle de le remplacer par le second geste mental (reculer de 3 sur la suite des nombres à partir de 21). C'est parce que ces deux procédures sont équivalentes que l'on peut remplacer l'une par l'autre.

Là encore, c'est parce qu'une culture a intérêt à ne pas laisser se perdre de tels phénomènes d'économie cognitive que cette équivalence a été dument étiquetée par une étiquette verbale : le signe écrit « - » et le mot « soustraction ».

Le cas de la division euclidienne

Considérons les deux problèmes suivants :

a) Problème de groupement réitéré (recherche du nombre de groupes et du nombre d'éléments isolés)

On a 935 stylos et l'on va former des lots de 4 stylos.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des stylos ?

b) Recherche des résultats d'un partage équitable

935 images vont être partagées équitablement entre 4 enfants.

Combien d'images chaque enfant aura-t-il ?

Restera-t-il des images ?

L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3^e niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant le quotient et le reste de la division 935 : 4.

9. Comme ce nombre dépasse 10, on observe évidemment de nombreuses erreurs.

Mais considérons le cas d'un enfant qui n'a pas encore étudié la division. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau.

Dans le cas du problème des stylos, l'enfant adoptera une procédure proche d'une simulation de l'action de groupement décrite dans l'énoncé. Il s'imaginera donc en train de former des groupes de 4 : un groupe de 4, un autre groupe de 4, etc. En revanche, dans le cas du partage des images, la procédure « de base », celle que les enfants évoquent longtemps pour donner du sens à l'action de partager, consiste à distribuer une image à chaque enfant, puis une autre, etc.

Ainsi, lorsque l'on s'intéresse à ces procédures « de base », on s'aperçoit que l'enfant forme des groupes de 4 dans le premier cas alors qu'il égrène les images une à une dans le second. Il ne lui est guère facile de prévoir que ces deux procédures produisent les mêmes résultats et de comprendre qu'elles sont équivalentes. Or, comme dans les cas de la multiplication et de la soustraction, c'est cette équivalence qui fonde le concept arithmétique de division parce qu'elle est source de phénomènes d'économie cognitive¹⁰.

Pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ?

La présentation qui vient d'être faite des équivalences qui fondent chacune des opérations arithmétiques pourrait laisser penser que le progrès des élèves se déroule de la même manière quel que soit le problème posé, et quelle que soit l'opération arithmétique qui, à terme, permet de résoudre ce problème. Or il n'en est rien. Les enseignants le savent bien. Ils soutiennent généralement que la soustraction et la division sont des « opérations difficiles », plus difficiles que la multiplication, et que, parmi les problèmes de soustraction et de division, certains sont faciles et d'autres difficiles.

Le cas de la multiplication

Considérons le cas d'un élève qui doit résoudre le problème suivant : *Combien coutent 2 livres à 17 € l'un ?* Dès que la multiplication a été introduite en classe, la reformulation de cet énoncé sous la forme 2 fois 17 ne pose guère de difficulté et elle conduit l'enfant à reconnaître qu'il s'agit là d'un problème de multiplication. Le plus souvent, l'élève écrit 17×2 , avec le 17 en premier car beaucoup de maîtres recommandent d'écrire d'abord le nombre dont l'ajout est répété¹¹.

10. L'addition aurait bien entendu pu figurer dans l'analyse précédente. Dans ce cas, les deux gestes mentaux dont l'addition exprime l'équivalence sont l'ajout d'un nombre b à un nombre a et l'ajout du nombre a au nombre b . Cette équivalence correspond à ce que l'on appelle la commutativité de l'addition. Lorsque l'on doit résoudre un problème tel que celui-ci : « Éric a 3 billes. Il gagne 198 billes. Combien en a-t-il maintenant ? », cette équivalence permet de déterminer $198 + 3$ en comptant 3 nombres au-dessus de 198, par exemple : 198, 199 (1 est ajouté), 200 (2), 201 (3), ça fait 201, plutôt que de compter 198 nombres au-dessus de 3 comme le suggère l'énoncé. L'économie cognitive est substantielle !

11. Autrefois, il était courant d'appeler ce nombre le multiplicande, l'autre étant dénommé le multiplicateur.

Face à cet autre problème : *Combien coutent 17 livres à 2 € l'un ?*, l'élève se comporte de la même manière : la reformulation de l'énoncé sous la forme 17 fois 2 l'amène à mobiliser la multiplication et à écrire 2×17 , avec le 2 en premier parce que c'est ce nombre dont l'ajout est répété. Or, dès que la commutativité de la multiplication a été exercée en classe, l'élève qui vient d'écrire 2×17 pour exprimer 17 fois 2 le calcule spontanément sous la forme 2 fois 17 ($17 + 17$). La plupart du temps, il ne se rend même pas compte qu'en calculant ainsi, il a utilisé la commutativité.

Une équipe de recherche de l'INRP, Ermel¹², a récemment souligné qu'« il est étonnant de voir avec quelle facilité la commutativité est utilisée et en quelque sorte admise : les élèves sont très rapidement convaincus que "ça marche" ! ». Nos observations vont dans le même sens.

Ainsi, l'équivalence qui fonde la multiplication n'est pas un obstacle pour les écoliers parce qu'elle n'est pas une équivalence entre deux gestes mentaux radicalement différents. Chercher *a fois b*, d'une part, et *b fois a*, de l'autre, ne sont en fait que deux versions d'un même geste qui est la recherche du résultat d'un ajout réitéré. L'étiquetage par le signe « \times » de l'un de ces gestes entraîne le même étiquetage pour l'autre geste, et l'enfant peut dès lors utiliser la commutativité qui a été exercée.

Il n'en va pas de même dans le cas de la soustraction et de la division.

Le cas de la soustraction et celui de la division

Les deux gestes mentaux dont l'équivalence fonde la soustraction sont de nature très différente : recherche du résultat d'un retrait, d'une part, et de la valeur d'un ajout, de l'autre. L'étiquetage par le signe « $-$ » est très facile pour un problème de recherche du résultat d'un retrait, mais très difficile pour la recherche de la valeur d'un ajout.

Considérons à nouveau les deux problèmes suivants :

a) Recherche du résultat d'un retrait

Éric a 21 billes. À la récréation, il perd 3 billes.

Combien a-t-il de billes maintenant ?

b) Recherche de la valeur d'un ajout

Éric a 3 billes. À la récréation, il gagne des billes.

Maintenant il a 21 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

L'énoncé du premier problème parle d'une perte ; pour l'enfant, l'emploi de la soustraction va de soi. En revanche, dans le second énoncé, on nous dit qu'Éric a gagné des billes : de nombreux enfants ne comprennent pas qu'on puisse utiliser la soustraction dans le cas d'un tel problème. Contrairement à ce qui se passe avec la multiplication, l'étiquetage par le signe « $-$ » du premier type de problème est loin d'entraîner cet étiquetage pour le second type de problème.

12. Ermel (Équipe de recherche mathématiques à l'école élémentaire de l'Institut national de recherche pédagogique), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*, Paris, Hatier, 1993.

De même, les deux gestes mentaux dont l'équivalence fonde la division sont eux aussi des gestes de nature très différente : l'un est la recherche des résultats d'un partage équitable, et l'autre la recherche des résultats d'un groupement réitéré (Combien de groupes peut-on former ? Restera-t-il des éléments isolés ?). Comme dans le cas de la soustraction, l'étiquetage par le signe « $:$ » (« divisé ») est très facile pour le premier type de problème mais plus difficile pour l'autre. En effet, les problèmes de recherche des résultats d'un partage sont très vite reconnus comme problèmes de division. Rapportons à ce sujet une anecdote. Un enfant de CE2 à qui l'on demandait d'inventer des énoncés de problèmes avec la contrainte supplémentaire qu'il sache résoudre ces problèmes, répondit : « Je vous aurais bien écrit un problème de partage, mais je n'ai pas encore appris la division ». Avant même que l'enseignant ait introduit la division en tant qu'opération arithmétique, de nombreux enfants en ont déjà entendu parler et elle leur est présentée comme une opération qui permet de connaître le(s) résultat(s) d'un partage.

En revanche, comme dans le cas de la soustraction, l'étiquetage par le signe « $:$ » (« divisé ») de l'autre type de problème (les problèmes de groupement réitéré) apparaît plus difficile. L'étiquetage par le signe « $:$ » (« divisé ») pour le premier type de problème est donc loin d'entraîner ce même étiquetage pour l'autre type de problème.

L'apprentissage à l'école ou quand l'opération arithmétique fonde l'équivalence des gestes mentaux

L'étiquetage par le symbolisme arithmétique fonctionne donc différemment dans le cas de la multiplication, d'une part, et dans celui de la soustraction ou de la division, d'autre part. Dans le cas de la multiplication, il est vraisemblable que certains enfants scolarisés remplacent parfois la recherche de *a fois b* par celle de *b fois a*, alors même que leur maître n'a pas pris la peine, lors de l'introduction du signe « \times », de leur enseigner l'équivalence de ces deux gestes mentaux¹³. Comme le dit Ermel, ces enfants le font parce que « ça marche », parce qu'en se comportant ainsi, ils ont « toujours eu bon ». On ne peut pas dire que, chez ces enfants, c'est l'équivalence des deux gestes mentaux qui fonde l'opération arithmétique ; on aurait plutôt envie de dire que c'est l'opération arithmétique (un savoir culturellement transmis) qui fonde l'équivalence des deux gestes mentaux, parce que c'est l'existence du signe « \times » qui les amène à se conduire comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de la recherche de *a fois b* et de *b fois a*.

Il s'agit évidemment là d'un cas extrême. D'une manière générale, le pédagogue doit se méfier d'un enseignement qui produit chez ses élèves les comportements adaptés alors qu'il n'a aucune assurance qu'ils maîtrisent les connaissances

13. Il est fréquent que l'on utilise un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes pour enseigner l'équivalence de ces deux gestes mentaux parce qu'ils correspondent alors au dénombrement des cases du même quadrillage, respectivement ligne par ligne (*a fois b*) et colonne par colonne (*b fois a*).

conceptuelles correspondantes. Mais force est de reconnaître que, concernant la multiplication, le fait de se comporter comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de a fois b et de b fois a conduit à terme la plupart des enfants à une réelle maîtrise de cette équivalence. Lorsqu'on les interroge sur les raisons qui expliquent que a fois b est égal à b fois a , la plupart du temps ils ne comprennent même pas que l'on puisse douter d'une telle égalité !

Trois conclusions peuvent être tirées de cette rapide comparaison de la multiplication, d'une part, et de la soustraction et la division, d'autre part :

1°) La multiplication est une opération qui apparaît « facile » aux enseignants parce qu'ils peuvent s'appuyer sur le symbolisme arithmétique pour amener les élèves à se comporter comme s'ils maîtrisaient l'équivalence de gestes mentaux qui fonde cette opération, ce qui, dans la plupart des cas, favorise à terme une appropriation réelle de cette équivalence.

2°) La soustraction et la division sont des opérations qui apparaissent « difficiles » aux enseignants parce qu'ils n'ont pas la même possibilité. Concernant ces opérations, l'usage du symbolisme arithmétique ne conduira pas à lui seul aux comportements attendus. Il est donc indispensable que l'enseignant aide ses élèves à s'approprier les équivalences de gestes mentaux qui fondent ces opérations. Le prochain chapitre est entièrement consacré aux différentes façons de le faire.

3°) L'opposition qui vient d'être faite entre la multiplication, d'une part, et la soustraction et la division, de l'autre, doit être nuancée. En effet, la multiplication n'est pas la seule opération arithmétique dont l'appropriation est favorisée par l'usage du symbolisme arithmétique. On essaiera de montrer dans le prochain chapitre que dans le cas de la soustraction et de la division aussi, le pédagogue peut, par un certain usage du symbolisme arithmétique, anticiper l'appropriation par ses élèves des équivalences de gestes mentaux qui sont requises. *D'un point de vue épistémologique*, ce sont les équivalences de gestes mentaux qui fondent les opérations arithmétiques, mais, *d'un point de vue didactique ou psychologique*, l'enfant naît dans une culture qui possède ces opérations arithmétiques : il n'a pas à les reconstruire de manière isolée, il doit seulement se les approprier. Aussi est-il tout aussi légitime d'affirmer, concernant l'apprentissage à l'école, que les opérations arithmétiques y fondent les équivalences de gestes mentaux que d'affirmer l'inverse. Une question fondamentale, qui sera débattue dans le prochain chapitre, est évidemment la suivante : comment penser l'articulation entre la transmission culturelle (celle du symbolisme arithmétique notamment) et les reconstructions conceptuelles qui sont nécessairement à la charge de l'enfant ?

La transition du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne

Contrairement à la transition du 1^{er} au 2^e niveau de résolution des problèmes arithmétiques, celle du 2^e au 3^e niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne. On a vu, par exemple, que l'équivalence de la recherche de a fois b et de la recherche de b fois a fonde l'existence de la multiplication en tant qu'opération arithmétique. Or, la personne qui s'est approprié cette équivalence voit son expérience quotidienne transformée parce qu'elle traite alors de manière identique l'une et l'autre sorte de situation. Elle peut notamment substituer l'un de ces gestes mentaux à l'autre. Là où il y avait auparavant de la diversité, il y a maintenant une unité.

On a vu, de même, que l'équivalence de la recherche du résultat d'un retrait et de la recherche de la valeur d'un ajout fonde l'existence de la soustraction en tant qu'opération arithmétique. Et, enfin, que l'équivalence de la recherche des résultats d'un groupement réitéré (Combien de groupes ? Combien d'éléments isolés ?) et de la recherche des résultats d'un partage équitable fonde l'existence de la division euclidienne. Chacune de ces équivalences transforme l'expérience quotidienne de celui qui se les est appropriées. Des situations qui, auparavant, apparaissaient seulement dans leur diversité, se voient dorénavant réunies parce qu'elles conduisent à un même traitement.

Ces réorganisations de l'expérience quotidienne nécessitent une expérience scolaire. Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons vu que les vendeurs de rues au Brésil ne substituent pas toujours a fois b à b fois a dans des circonstances où il en résulterait une économie cognitive substantielle. Ainsi, la plus accessible des réorganisations, celle qui correspond au concept arithmétique de multiplication, n'a pas nécessairement lieu lorsque le milieu scolaire fait trop défaut. Il est raisonnable de penser que les réorganisations qui correspondent aux concepts arithmétiques de soustraction et de division dépendent encore plus du milieu scolaire que celle qui correspond à la multiplication.

Comment savoir si ces réorganisations ont eu lieu pour un élève donné ?

Rappelons d'abord que l'usage du symbolisme arithmétique au 2^e niveau est susceptible de leurrer les enseignants : comme la forme a changé, ils peuvent croire que les réorganisations qui conduisent aux concepts arithmétiques ont eu lieu, alors que ce n'est pas le cas.

Mais de plus, ni l'utilisation de la soustraction (du signe « - ») pour déterminer le résultat d'un retrait (Éric a 21 billes. Il perd 3 billes), ni l'utilisation de la division (du signe « : ») pour chercher les résultats d'un partage équitable ne peuvent être considérées comme des preuves de l'accès au 3^e niveau car, dans ces deux cas, l'usage de ces opérations arithmétiques se fait en continuité avec l'expérience quotidienne (soustraire = retrancher et diviser = partager).

En revanche, lorsqu'un enfant utilise la soustraction pour déterminer la valeur d'un ajout (Éric a 17 billes, il gagne des billes, et après il en a 41) ou lorsqu'il utilise la division pour résoudre un problème de groupement réitéré (On a 935 cubes et l'on va former des piles de 4), on est certain que les réorganisations conduisant aux concepts arithmétiques se sont au moins amorcées. C'est pourquoi nous accorderons une grande place à ces deux types de problèmes dans les chapitres suivants. Ils sont de bons révélateurs du niveau conceptuel des élèves.

À propos de la notion de « champ conceptuel »

Rappelons que cette notion a été introduite par Gérard Vergnaud¹⁴, que le projet de recherche de cet auteur est proche du nôtre et qu'il s'agit d'expliquer ici pourquoi nous n'avons pas repris tel quel le cadre théorique qu'il a proposé. En première approximation, Vergnaud désigne par le terme « champ conceptuel » un ensemble de tâches ou, disons, de problèmes. Les deux « champs conceptuels » les plus fréquemment cités sont celui des problèmes additifs et celui des problèmes multiplicatifs. Il convient de remarquer que cet auteur fait un usage particulier du mot « additif » : il appelle « problèmes additifs » ceux qui peuvent être résolus par une addition, bien sûr, mais aussi ceux qui peuvent l'être par une soustraction. De même, il décide d'appeler « problèmes multiplicatifs » ceux qui peuvent être résolus par une multiplication, mais aussi par une division, une règle de trois, etc. Vergnaud¹⁵ classe les problèmes additifs en 6 groupes. Quatre de ces groupes nous intéressent plus particulièrement parce que les problèmes correspondants peuvent être proposés à l'école élémentaire. Ce sont :

1^{er} groupe - *Les problèmes parties-tout*

Par exemple, imaginons que a tulipes et b roses forment un bouquet de c fleurs. Cette situation permet d'engendrer deux types de problèmes selon que a et b sont connus (les parties sont connues) et c cherché (c'est le tout qui est inconnu), ou que c est connu (le tout est connu), que l'une des parties l'est également et que l'autre partie est inconnue.

2^e groupe - *Les problèmes d'ajout ou de retrait*

Une quantité est transformée par un ajout ou un retrait pour donner une nouvelle quantité. Par exemple : Éric dispose de a billes. Il gagne (ou perd) b billes. Il dispose maintenant de c billes. Les six types de problèmes correspondants sont soit la recherche du résultat d'un ajout ou d'un retrait (a connu, b connu, c inconnu), soit la recherche de la valeur de l'ajout ou du retrait (a et c connus, b inconnu), soit encore la recherche de la quantité initiale (b et c connus, a inconnu).

3^e groupe - *Les problèmes de comparaison*

Donnons deux exemples : « Mme Martin a 30 € et Mme Dupont a 50 €. Combien Mme Dupont a-t-elle de plus que Mme Martin ? »

« Mme Martin a 30 €. C'est 20 € de moins que Mme Dupont. Combien Mme Dupont a-t-elle d'argent ? »

Là encore, on peut engendrer six types de problèmes différents, suivant que la comparaison s'exprime avec « de plus que » ou avec « de moins que », et suivant que le terme inconnu est l'une ou l'autre des quantités comparées, ou encore la différence de ces deux quantités.

4^e groupe - *Les compositions d'ajouts ou de retraits*

Donnons un exemple : « Jacques a perdu 27 billes lors d'une première partie, il en a gagnées 19 lors d'une seconde partie. Quel est le bilan de ces deux parties ? ». Là encore, un grand nombre de problèmes peuvent être engendrés selon la nature de l'inconnue (1^{re} transformation, 2^e transformation, bilan), et selon que l'on parle d'ajouts ou de retraits.

Ce type de classification présente un intérêt évident pour le pédagogue : il lui permet d'engendrer un grand nombre de problèmes d'addition et de soustraction et de proposer ainsi des tâches variées à ses élèves. Or, une certaine variété dans les tâches proposées est très certainement un facteur qui favorise le progrès des enfants¹⁶.

Mais il nous semble que ce n'est pas la principale raison qui a conduit Vergnaud à introduire la notion de champ conceptuel. Pour comprendre l'œuvre de cet auteur, il faut en effet avoir présent à l'esprit qu'il se situe de manière critique vis-à-vis de la modélisation de l'apprentissage qui a été dominante jusque vers 1990 aux États-Unis, modélisation selon laquelle les savoir-faire résulteraient pour l'essentiel d'un enseignement explicite (cf. le modèle d'Anderson¹⁷, par exemple).

Or, un grand nombre des problèmes additifs que Vergnaud a distingués ne sont pas travaillés en classe, et pourtant, à terme, les élèves savent les résoudre. C'est la preuve que le progrès ne résulte pas seulement d'une tentative d'application des procédures qui leur ont été enseignées, mais qu'ils abordent un problème nouveau par analogie avec des situations antérieures (on peut parler de « filiations »), et même, à certains moments, en inventant de nouvelles compétences (on peut parler alors de « ruptures »).

Pour Vergnaud, le fait de considérer un vaste ensemble de tâches lui permet de mieux mettre en évidence le fait qu'il existe des filiations et des ruptures dans les modes de résolution utilisés par les enfants, et il défend, avec raison selon nous, l'idée que l'étude de ces filiations et ruptures est la tâche majeure à laquelle les psychologues de l'apprentissage devraient s'atteler.

14. On pourra consulter par exemple : Vergnaud, G., « La Théorie des champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 133-170, 1990.

15. Vergnaud, G., & Durand, C., « Structure et complexité psychogénétique », *Revue française de pédagogie*, n° 36, pp. 28-43, 1976.

16. Voir par exemple : Stigler, J., Fuson, K., Ham, M. & Kim, M., « An Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in American and Soviet Elementary Mathematics Textbooks », *Cognition and Instruction*, 3, 153-171, 1986.

17. Anderson, J.-R., *The Architecture of Cognition*. Cambridge, Harvard University Press, 1983.

Des projets scientifiques proches, mais des moyens différents

Notre projet est donc très proche de celui de Vergnaud. Cependant, nous n'avons pas envisagé ici le même ensemble de problèmes que lui et nous ne le ferons pas non plus dans les prochains chapitres.

L'analyse qui sera présentée s'appuiera seulement sur l'étude des cinq sortes de problèmes que nous avons déjà envisagés : un problème de multiplication (recherche du résultat d'un ajout réitéré), deux problèmes de soustraction (recherche du résultat d'un retrait et recherche de la valeur d'un ajout) et deux problèmes de division (recherche des résultats d'un partage et problème de groupement réitéré). On ne s'intéressera donc pas à l'ensemble des problèmes d'addition-soustraction, ni à l'ensemble des problèmes de multiplication-division ; mais on s'intéressera en revanche à un ensemble de problèmes qui comprend à la fois des problèmes d'addition-soustraction et des problèmes de multiplication-division.

La position défendue ici est qu'aucun dogmatisme ne doit présider à l'étude des filiations et ruptures dans les modes de résolution utilisés par les enfants et que le chercheur ne doit pas hésiter, pour répondre à certaines questions, à focaliser son attention sur des ensembles de problèmes différents de ceux que Vergnaud a définis comme, respectivement, le champ conceptuel des problèmes additifs et le champ conceptuel des problèmes multiplicatifs.

Un premier exemple d'une telle question est celle à laquelle nous avons répondu dans ce chapitre : pourquoi les problèmes de multiplication sont-ils « plus faciles » ? Lorsque l'on compare, comme nous l'avons fait, la multiplication à la soustraction, on ne reste pas au sein du champ conceptuel des problèmes multiplicatifs.

Or, c'est bien la comparaison avec la soustraction qui permet le mieux de comprendre la spécificité de la multiplication : dans le cas de la multiplication, l'étiquetage avec le signe « \times » d'un geste mental (recherche de a fois b , par exemple), entraîne l'étiquetage avec le même signe du geste mental qui lui est équivalent (recherche de b fois a), alors que dans le cas de la soustraction, non seulement l'étiquetage avec le signe « $-$ » de la recherche de la valeur d'un ajout ne va pas de soi, mais on peut même considérer que cet étiquetage semble *a priori* incompatible avec l'action décrite dans l'énoncé (on parle d'un ajout et l'on pourrait utiliser le signe « $-$ » ?).

Donnons un autre exemple de question qui nécessite d'étudier un ensemble de problèmes différents de ceux qui appartiennent à un seul champ conceptuel.

Quand l'équipe Ermel¹⁸ se réfère au champ conceptuel des problèmes additifs, elle recommande explicitement d'introduire le signe « $-$ » la même année que le signe « $+$ », c'est-à-dire l'année du CP. Les justifications avancées sont au nombre de trois : d'une part, le fait que les problèmes d'addition et de soustraction doivent être abordés en même

temps, d'autre part, le fait que les enfants rencontrent le signe « $-$ » dans leur milieu familial ou sur la calculette, et enfin le fait qu'il serait dommageable que les enfants ne disposent que d'un seul signe opératoire au CP, le signe « $+$ ».

Ces arguments semblent pouvoir être utilisés sans grands changements pour parler des rapports qu'entretiennent la division et la multiplication. Et pourtant, lorsque la même équipe¹⁹ se réfère au champ conceptuel des problèmes multiplicatifs, elle décide de ne pas enseigner le signe de la division au CE2, créant ainsi un décalage de deux ans entre l'introduction du signe de la multiplication (introduit au CE1) et celui de la division (introduit au CM1).

On peut évidemment regretter que l'hétérogénéité de ces choix n'ait pas été justifiée, du moins à notre connaissance. La question posée est celle du rôle de l'introduction des écritures arithmétiques dans le progrès des enfants. Ou encore, et de manière plus précise : l'introduction des écritures arithmétiques doit-elle être pensée très différemment pour le couple multiplication-division et pour le couple addition-soustraction ?

Cette question sera abordée dans le prochain chapitre. Pour y répondre, il faut envisager à la fois des problèmes d'addition-soustraction et des problèmes de multiplication-division, et donc se donner un objet d'étude plus large que le seul champ conceptuel des problèmes additifs (addition-soustraction) et plus large que celui des problèmes multiplicatifs (multiplication-division). Mais si l'on s'intéresse à tous les problèmes d'addition-soustraction et à tous les problèmes de multiplication-division, on se trouve face à une « explosion combinatoire » : leur nombre est trop grand pour aborder l'apprentissage de leur résolution de manière précise.

D'où le choix fait ici de ne pas s'intéresser à l'ensemble des problèmes additifs, ni à l'ensemble des problèmes multiplicatifs, mais seulement à certains d'entre eux dont on peut penser qu'ils sont « représentatifs » de leurs champs conceptuels respectifs, du moins pour la question qui nous intéresse : ce sont ceux dont nous avons dit qu'ils « fondent » respectivement la soustraction et la division en tant qu'opérations arithmétiques. Et parmi ceux-ci, on s'intéressera plus particulièrement encore aux deux sortes de problèmes qui sont le mieux susceptibles de révéler que les réorganisations nécessaires à l'accès aux concepts arithmétiques de soustraction et de division s'amorcent : pour la soustraction, les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout, et, pour la division, les problèmes de groupements réitérés.

18. Ermel, *Apprentissages numériques, Cycle des apprentissages fondamentaux, CP*, Paris, Hatier, 1991.

19. Ermel, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (deuxième année)*, Paris, Hatier, 1995.

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté un cadre théorique qui permet de penser, à un niveau encore très général, les filiations et les ruptures entre les différentes procédures de résolution de problèmes utilisées par les enfants. L'analyse des ruptures apparaît cruciale, et dans les prochains chapitres nous nous efforcerons de préciser ce point de l'analyse.

Pour l'instant, trois niveaux de procédures ont été distingués. Au 1^{er} niveau, les enfants simulent la situation décrite dans l'énoncé, soit avec du matériel, soit par le dessin. Au 2^e niveau, les enfants utilisent le symbolisme arithmétique, mais ils en font un usage banal : ils utilisent notamment le signe « + » pour exprimer un ajout et le signe « - » pour un retrait. Au 3^e niveau, les enfants, après une première lecture de l'énoncé, reconnaissent les problèmes comme appartenant à la catégorie de ceux qui peuvent être résolus en faisant telle ou telle opération arithmétique.

Le passage du 1^{er} au 2^e niveau correspond à un premier usage du symbolisme arithmétique, mais il se fait plutôt dans la conti-

nuité avec l'expérience quotidienne, alors que le passage du 2^e au 3^e niveau s'accompagne d'une réorganisation de cette même expérience : les enfants doivent apprendre qu'il est équivalent de chercher a fois b et b fois a , qu'il est équivalent de chercher la valeur d'un ajout et le résultat d'un retrait, qu'il est équivalent de chercher combien de fois b est contenu dans a et les résultats du partage de a en b parts équitables. L'appropriation de ces équivalences ne se fait pas dans les mêmes conditions pour la multiplication, d'une part, et la soustraction et la division, de l'autre, parce que le symbolisme arithmétique ne fonctionne pas de manière identique dans l'un et l'autre cas. Les enseignants doivent être particulièrement attentifs à favoriser l'appropriation des équivalences requises dans le cas de la soustraction et de la division.

Ce sont respectivement les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout (pour la soustraction) et les problèmes de groupement réitéré (pour la division) qui permettent le mieux de savoir si l'appropriation de ces équivalences est amorcée. Ces problèmes sont donc les meilleurs révélateurs du niveau conceptuel des enfants.

Chapitre 2

L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes : quatre attitudes pédagogiques

PLAN DU CHAPITRE

- Une pratique pédagogique « dangereuse » !
- L'attitude traditionnelle.
- L'attitude constructiviste radicale.
- Un exemple d'attitude rénovatrice.
- Un exemple d'attitude réformatrice.
 - Un premier type de séances : enseigner le calcul mental d'une soustraction et d'une division.
 - Un second type de séances : les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC).
 - Une diversité aux multiples vertus pédagogiques.
 - Des problèmes privilégiés pour susciter et repérer le progrès des élèves :
 - le cas de la soustraction,
 - le cas de la division.
- Conclusion.
 - Les quatre attitudes (résumé).
 - L'attitude réformatrice décrite ici est d'« inspiration vygotkienne ».

Ce chapitre aurait pu recevoir d'autres titres. Examinons-les pour présenter son contenu. Il aurait pu s'intituler : « Gérer les continuités et les ruptures avec l'expérience quotidienne : quatre attitudes pédagogiques », ou encore : « Penser l'articulation entre la transmission scolaire et les reconstructions conceptuelles en arithmétique : quatre attitudes pédagogiques ». L'intérêt du premier de ces titres est de montrer qu'on se situe ici dans le prolongement du chapitre précédent : il s'agit d'examiner le problème de la continuité et des ruptures avec l'expérience quotidienne d'un point de vue plus pédagogique (moins épistémologique) que dans le chapitre 1. Il s'agit notamment de montrer qu'il existe diverses manières de gérer en classe la transition entre les résolutions de problèmes aux deux premiers niveaux et les résolutions au 3^e niveau. Diverses « attitudes pédagogiques » sont possibles.

Le deuxième titre (transmission scolaire et reconstructions conceptuelles) est une sorte de reflet du précédent : de même que l'expérience quotidienne ne saurait suffire pour que l'enfant s'approprie les concepts arithmétiques (des ruptures ou des réorganisations sont nécessaires), la transmission scolaire, elle aussi, est insuffisante : certaines reconstructions conceptuelles sont *in fine* à la charge de l'enfant, en liaison avec son expérience quotidienne.

Chacun de ces deux titres met ainsi l'accent sur l'un des « ingrédients » du progrès (l'expérience quotidienne ou bien la transmission scolaire), tout en soulignant, dans le même temps, que ce seul « ingrédient » ne saurait suffire.

C'est finalement un troisième titre qui a été retenu. C'est bien la même problématique qui va être abordée : depuis que l'école existe, les maîtres disent qu'ils réussissent à enseigner le calcul à leurs élèves : la transmission scolaire du calcul est donc apparemment réussie¹. Mais ils affirment aussi que leurs élèves ont du mal à réinvestir ces compétences en calcul pour résoudre des problèmes (les reconstructions conceptuelles sont difficiles).

Ce titre a été retenu parce qu'il fait référence à l'une des principales préoccupations des enseignants et parce qu'il est l'un des thèmes majeurs de la recherche en didactique des mathématiques.

Il faut le dire en préambule : tous les chercheurs n'ont pas la même attitude lorsqu'ils abordent cette question. L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes est encore aujourd'hui l'objet d'un débat. Les positions qu'il est possible de tenir dans un tel débat méritent d'être exposées de façon critique aux enseignants. C'est ce que nous allons faire.

Le chapitre précédent se terminait en soulignant que les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout (Fatou a 37 billes. Elle gagne des billes et après elle en a 51. Combien a-t-elle gagné de billes ?) et les problèmes de groupement réitéré (On dispose de 925 stylos et on fait des lots de 4 stylos. Combien de lots ? Combien de stylos isolés ?) sont de bons révélateurs du niveau conceptuel des enfants pour la soustraction et pour

1. On défendra ici l'idée que l'enseignement du calcul accorde généralement trop de place aux algorithmes écrits et pas assez aux stratégies de calcul mental. D'où l'emploi du mot « apparemment ».

la division, respectivement. L'accès au niveau le plus expert est très difficile pour ces problèmes parce qu'il nécessite que l'élève s'approprie certaines équivalences de gestes mentaux. Ainsi, lorsque l'on exige trop précocement des enfants qu'ils résolvent ces problèmes difficiles en choisissant la « bonne opération arithmétique » (c'est-à-dire au 3^e niveau), nous verrons que certains d'entre eux s'éloignent de la réussite plus qu'ils ne s'en approchent. Nous commencerons par analyser ce phénomène. Nous présenterons ensuite quatre façons d'aborder l'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes : l'attitude traditionnelle, l'attitude constructiviste radicale, l'attitude rénovatrice, et enfin une attitude que nous qualifierons de réformatrice, et qui est celle que nous retiendrons finalement. La conclusion comportera deux parties :

1°) On résumera la présentation des différentes attitudes pédagogiques.

2°) On montrera comment la théorie de Vygotski a guidé l'élaboration des idées exposées ici. C'est pour faciliter la lecture de ce chapitre que la référence à Vygotski n'y figure qu'à la fin : il n'est nul besoin, en effet, de connaître les travaux de cet auteur pour entrer dans l'exposé ci-dessous.

Une pratique pédagogique « dangereuse » !

Cette pratique est celle où l'on demande à l'élève qui est face à un énoncé de problème : « Faut-il faire une addition, une soustraction, une multiplication ou une division ? », c'est-à-dire de résoudre le problème directement au 3^e niveau. Une autre forme de cette pratique pédagogique dangereuse consiste à exiger des élèves qu'ils tracent deux colonnes sur leur feuille : une colonne « solution » et une colonne « opérations ». En effet, ce format de réponse sous-entend que l'élève doit impérativement sélectionner la ou les bonnes opérations pour obtenir la solution numérique. Une dernière forme, enfin, consiste à faire résoudre des problèmes en utilisant une calculette « 4 opérations » de manière classique : l'enfant sélectionne la bonne opération et calcule le résultat grâce aux touches « + », « - », « x » et « : » de la calculette. Pour comprendre pourquoi une telle pratique pédagogique est dangereuse, examinons l'évolution des performances des élèves lorsqu'ils sont confrontés à un problème du type « recherche de la valeur d'un ajout » (c'est-à-dire au problème de soustraction dont nous avons vu qu'il est difficilement résolu au 3^e niveau et constitue donc un bon « révélateur » du niveau conceptuel des enfants).

Lorsque les élèves ont la possibilité, pour résoudre ce type de problème, de simuler la situation décrite dans l'énoncé en utilisant du matériel ou en dessinant (résolution au 1^{er} ou au 2^e niveau), la réussite est quasi totale dès le CE1. Riley, Greeno & Heller², par exemple, rapportent les pourcentages de réussite suivants :

Classe	GS	CP	CE1
Réussite	61 %	56 %	100 %

Réussite à la recherche de la valeur d'un ajout dans des conditions où l'élève peut simuler la situation décrite dans l'énoncé.

Mais la situation se dégrade dès que l'on exige des enfants qu'ils résolvent directement ce type de problème au 3^e niveau. En effet, le tableau ci-dessous montre qu'au CE2, lorsque l'on demande à ces mêmes enfants de « choisir la bonne opération », la réussite n'est plus que de 50 %. L'autre moitié des élèves échouent et certains se mettent ainsi à échouer pour longtemps puisque la réussite n'est que de 80 % au CM2 !

Classe	CE2	CM1	CM2
Réussite	50 %	71 %	80 %

Réussite à la recherche de la valeur d'un ajout dans des conditions où l'élève doit « trouver la bonne opération » (d'après une recherche de Hendrickson & Thompson, rapportée par Riley & Greeno³).

Comment expliquer de tels résultats ? Pour résoudre un problème arithmétique, les élèves doivent en comprendre l'énoncé et trouver la solution numérique. Or, lorsqu'ils simulent la situation décrite dans l'énoncé par le dessin ou avec du matériel (1^{er} niveau), la solution numérique émerge dans le même temps que la compréhension progresse. En revanche, lorsqu'on leur demande de trouver la bonne opération, le contrôle de la résolution s'en trouve totalement bouleversé. Quand il faut chercher le résultat d'un ajout (Saïd a 18 billes et il gagne 13 billes) ou le résultat d'un retrait (Mme Martin a 34 € et elle dépense 15 €), par exemple, il suffit de s'intéresser à des indices superficiels de l'énoncé (les mots « gagne », « dépense ») pour sélectionner la bonne opération.

Certains enfants ne se préoccupent plus alors suffisamment de comprendre l'énoncé : ils choisissent une opération sur ces indices superficiels (les mots « gagne », « en plus »... induisent l'usage de l'addition, les mots « perd », « reste »... celui de la soustraction, etc.). Concernant le problème de recherche de la valeur d'un ajout, par exemple, l'énoncé dit qu'Éric avait 3 billes, puisqu'il en a gagné jusqu'à en avoir 21. L'erreur la plus fréquemment observée résulte évidemment du mot « gagne » : elle consiste à faire le choix erroné de l'addition. C'est ainsi que de nombreux enseignants attribuent l'échec en résolution de problèmes de certains de leurs élèves à des « difficultés de lecture » plus qu'à un défaut de connaissances en mathématiques. En fait, leur analyse doit être précisée : les difficultés de lecture en cause ne sont pas nécessairement générales ; elles peuvent n'être que des difficultés à lire ce genre particulier de texte qu'est l'énoncé d'un problème. Et souvent, cette difficulté a surgi parce que l'on a demandé trop précocement à ces enfants de résoudre les problèmes

2. Riley, M., Greeno, J., & Heller, J., « Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic », in H. Ginsburg (Ed), *The Development of Mathematical Thinking*, New York, Academic Press, 1983.

3. Riley, M., & Greeno, J., « Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems », *Cognition and Instruction*, 5 (1), pp. 49-101, 1988.

au 3^e niveau. Ils veulent obtenir trop rapidement la solution numérique et fondent leur choix d'une opération arithmétique sur des indices superficiels. Leur lecture de l'énoncé s'en trouve affectée parce qu'ils cherchent insuffisamment à le comprendre.

La pratique pédagogique où l'on demande de choisir la « bonne opération » est donc particulièrement dangereuse, surtout quand l'enfant est confronté à l'un des problèmes difficiles qui sont révélateurs du niveau conceptuel des enfants. Nous allons voir que l'attitude des pédagogues vis-à-vis de cette pratique pédagogique permet de caractériser la façon dont ils envisagent l'articulation entre la résolution de problèmes et le calcul.

L'attitude traditionnelle

Selon ce que l'on appellera le « point de vue traditionnel », l'enfant ne peut être confronté à un problème dit de soustraction, de multiplication, de division, de proportionnalité... qu'après avoir étudié les contenus mathématiques correspondants. Pour ceux qui abordent ainsi l'articulation entre la résolution de problèmes et le calcul, résoudre un problème c'est sélectionner la (ou les) « bonne(s) opération(s) arithmétique(s) ». D'où l'adoption sans état d'âme de la pratique pédagogique que nous avons qualifiée de « dangereuse » : dès que la division, par exemple, a été étudiée, ces enseignants exigent de leurs élèves qu'ils choisissent cette opération pour résoudre les problèmes correspondants. Or, résoudre un problème en sélectionnant la « bonne opération arithmétique », c'est le résoudre au niveau le plus expert (3^e niveau) ; ce n'est qu'une possibilité parmi d'autres (cf. le chapitre 1). Cette attitude a malheureusement, pour certains enfants, des conséquences particulièrement néfastes. Considérons le cas des élèves qui échouent aux problèmes difficiles de soustraction et de division parce qu'ils sélectionnent une opération arithmétique sur des indices superficiels. Ils sont d'autant plus désespérés que cette stratégie les conduit tantôt à une réponse correcte (recherche du résultat d'un ajout ou d'un retrait, recherche des résultats d'un partage), tantôt à une réponse erronée (recherche de la valeur d'un ajout, problèmes de groupements réitérés), sans qu'ils soient en mesure d'en comprendre les raisons. Certains élèves dysfonctionnent alors plus gravement encore, perdant totalement de vue ce qu'il conviendrait de faire pour progresser en résolution de problèmes, à savoir : essayer de mieux comprendre les énoncés.

Avec ces élèves, il se noue alors ce que Brousseau⁴ appelle un « contrat didactique » qui, en lui-même, crée un obstacle au progrès : ils fondent leurs réponses essentiellement sur ce qu'ils croient être le désir du maître et non sur les caractéristiques de la tâche. Si l'adulte est proche d'eux, ils utilisent par exemple la stratégie qu'Astolfi appelle la « stratégie

du sourcil » : après une lecture superficielle de l'énoncé, ils avancent le choix d'une opération tout en scrutant le visage du maître ; s'ils y lisent la moindre marque de réprobation, ils se ravisent et choisissent une autre opération.

C'est ainsi que l'échec en résolution de problèmes trouve souvent son origine dans la « perte de contrôle » qui résulte de l'abandon prématuré d'une résolution, soit par simulation (1^{er} niveau), soit au 2^e niveau, pour tenter une résolution arithmétique (3^e niveau).

L'attitude traditionnelle, parce qu'elle conduit à envisager la résolution des problèmes au 3^e niveau comme la seule possible, est donc responsable de certains dysfonctionnements graves.

L'attitude constructiviste radicale

Il existe un moyen radical d'éviter la pratique pédagogique « dangereuse » : il suffit de ne pas introduire les signes « - » et « : », c'est-à-dire de ne pas enseigner explicitement la soustraction ni la division. On est sûr alors que l'enfant ne sera pas tenté de choisir la « bonne opération » puisque les opérations ne lui ont pas été présentées !

Bien entendu, il se pourrait que le milieu familial de l'enfant lui enseigne l'existence des signes « - » et « : ». Mais la situation ne s'en trouve guère améliorée parce que l'absence de ces signes à l'école empêche tout enseignement des techniques mentales et écrites du calcul d'une différence $a - b$ et du quotient et du reste de la division $a : b$. S'il ne peut tirer aucun bénéfice de la reconnaissance de la « bonne opération », l'élève n'a évidemment aucun intérêt à reconnaître un problème donné en tant que problème de soustraction ou de division. Tant que personne n'a mis à sa disposition les stratégies mentales ou écrites de calcul qui conduisent à la solution numérique dès que la catégorie du problème a été reconnue, il ne lui sert à rien de reconnaître que tel problème appartient à telle catégorie.

En bref, l'enfant ne risque pas de résoudre trop précocement les problèmes de soustraction ou de division au 3^e niveau, parce qu'il est dépourvu des outils qui, d'une part, permettent ce niveau de résolution et, d'autre part, rendent ce niveau de résolution utile parce qu'économique.

Un point de vue constructiviste radical concernant la soustraction a été influent en France entre 1970 et 1990 : le signe « - » était introduit tardivement (vers la fin du CE1), si bien que durant le CP et le CE1, les élèves pouvaient seulement résoudre les problèmes de soustraction au 1^{er} ou au 2^e niveau⁵.

Ce point de vue est toujours dominant en France, concernant la division. Le signe « : » (« divisé ») est introduit tardivement, de même que le calcul mental d'une division ou encore la technique écrite de cette opération. Dans la plupart des progressions, leur introduction se fait vers le milieu du CM1,

4. Brousseau, G., *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse d'État, université Bordeaux-1, 1986.

5. Il semble bien qu'il n'y ait qu'en France et dans quelques cantons suisses que, durant une longue période, le signe « - » n'a pas été introduit la même année que le signe « + ».

alors que dans un pays comme l'Italie, par exemple, elle se fait dès le CE1, deux ans auparavant. Très souvent, en France, les enfants de CE2 et du début du CM1 peuvent seulement résoudre les problèmes de division au 1^{er} et au 2^e niveaux. Selon un tel point de vue constructiviste radical, il suffirait, pour que les enfants progressent, qu'ils soient mis en situation de résolution de problèmes : ils résoudraient progressivement les problèmes aux 1^{er}, 2^e et enfin 3^e niveaux.

Nous avons vu que l'attitude traditionnelle repose sur une conception erronée du développement des compétences des enfants (conception selon laquelle l'élève est démuné avant tout enseignement) ; l'attitude constructiviste radicale repose, elle aussi, sur une conception erronée du progrès : il est faux de penser que la pratique de la résolution de problèmes aux 1^{er} et 2^e niveaux suffit en elle-même pour accéder au 3^e niveau. Sans enseignement, la plupart des enfants plafonneraient au 2^e niveau. L'exemple des jeunes Brésiliens très peu scolarisés qui, pour survivre, se livrent au commerce de noix de coco ou de paquets de popcorn dans la rue atteste de ce phénomène : il arrive que ces jeunes gens n'atteignent pas le 3^e niveau de résolution pour les problèmes de multiplication, alors que ce sont les plus faciles à résoudre à ce niveau⁶.

L'attitude traditionnelle est critiquable parce qu'en demandant trop tôt aux enfants de choisir la bonne opération arithmétique (en adoptant ce que l'on a appelé une « pratique pédagogique dangereuse »), on crée de l'échec. L'attitude constructiviste radicale verse dans l'excès inverse : le maître laisse aux élèves le soin de construire les équivalences de gestes mentaux qui sont nécessaires pour s'approprier les opérations arithmétiques, sans soutenir leur progrès par un enseignement. Là encore, il est vraisemblable que le pédagogue crée de l'échec, un « échec par omission » en quelque sorte.

Si l'on raisonne en terme de continuités et de ruptures (ou de réorganisations), comme nous l'avons fait au chapitre 1, l'attitude traditionnelle conduit à tenter d'imposer des réorganisations alors qu'aucune attention n'a été portée à ce que les élèves savent déjà faire dans la continuité de l'expérience quotidienne. En revanche, le constructivisme radical ne fait que gérer les continuités ; il ne favorise aucune réorganisation. Les deux attitudes que nous allons examiner maintenant se situent de manière critique par rapport aux précédentes. Leur objectif commun est clair : il s'agit de prendre au sérieux l'aspect dangereux de la pratique pédagogique consistant à demander aux élèves de choisir la bonne opération, tout en ne renonçant pas à favoriser la construction des équivalences entre gestes mentaux qui sont caractéristiques des opérations arithmétiques.

Cependant, ces deux nouvelles attitudes s'opposent entre elles. Dans un cas, en effet, le pédagogue enseigne *explicitement* et *collectivement* le choix de la bonne opération (ce qui le rapproche du pédagogue traditionnel), mais en réno-

6. S'ils cherchent le prix de 10 objets à 4 cruzeiros l'un, ils calculent 10 fois 4 (4 + 4 + 4 + ...) et non 4 fois 10 qui est plus simple (cf. chapitre 1).

vant cet enseignement (c'est ce que l'on appellera l'attitude *rénovatrice*), alors que dans l'autre cas, le pédagogue favorise un apprentissage *implicite* du choix de la bonne opération (c'est ce que l'on appellera l'attitude *réformatrice*).

Un exemple d'attitude rénovatrice

Cette attitude rénovatrice conduit le pédagogue à porter son attention sur deux aspects de la pédagogie de la résolution de problèmes.

1^o) Il s'agit d'abord de rénover la pratique pédagogique « dangereuse » (Faut-il faire une addition ? Une soustraction ? Une multiplication ? Une division ?). Le pédagogue rénovateur continue à orienter l'élève vers le choix de la bonne opération, mais il lui enseigne l'usage de représentations schématiques conventionnelles (schémas fléchés, diagramme de Venn, etc.) pour l'aider à faire le « bon choix ».

2^o) Il cherche en outre à ce que les savoirs et savoir-faire mathématiques (et notamment l'utilisation des schémas précédents) résultent de la confrontation avec des situations pratiques et des débats qui sont menés en classe à partir de ces situations⁷. En ce sens, le pédagogue rénovateur s'inspire autant que possible de l'option constructiviste.

En fait, aucun projet rénovateur n'est allé à son terme dans notre pays, mais le projet de la deuxième équipe Ermel⁸ concernant l'enseignement de la soustraction se situait clairement dans cette perspective, du moins à son origine (avant l'expérimentation). Commençons par commenter ce projet. Ermel⁹ recommande explicitement d'introduire le signe « - » la même année que le signe « + » (l'année du CP). Ce choix s'oppose à celui qui prévalait depuis 1970 d'un enseignement tardif du signe « - », choix dont nous avons dit qu'il était d'inspiration constructiviste radicale.

Mais le projet de l'équipe ne se limitait pas à cette introduction plus précoce du signe « - » ; il s'agissait aussi d'enseigner aux élèves des représentations schématiques conventionnelles, comme l'usage d'une demi-droite numérique ou encore l'usage de schémas fléchés tels que ceux-ci :

$$\begin{array}{cc} + b & - b \\ a \rightarrow c & a \rightarrow c \end{array}$$

Ces schémas sont en effet susceptibles d'aider les élèves dans le choix de la bonne opération arithmétique lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes dont l'énoncé parle d'un ajout ou d'un retrait. Montrons-le avec le problème suivant :

7. De nombreux problèmes d'addition et de soustraction peuvent ainsi être proposés à partir de la situation pratique suivante : une boîte opaque contient des jetons et l'on en rajoute ou l'on en prélève. Pour poser un problème de recherche de la valeur d'un ajout, par exemple, il suffit de connaître le contenu initial de la boîte (13 jetons bleus, par exemple), de rajouter une quantité inconnue de jetons d'une autre couleur (rouges par exemple). Un élève vient dénombrer le tout (41 jetons en tout), les autres élèves doivent anticiper combien il y aura de jetons rouges quand on versera le contenu de la boîte sur une table.

8. Une première équipe Ermel a publié une première série d'ouvrages destinés aux enseignants de l'école élémentaire entre 1977 et 1982. Une autre équipe publie sous le même sigle une nouvelle série d'ouvrages depuis 1990.

9. Ermel, *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages fondamentaux, CP*, Paris, Hatier, 1991.

Éric a 43 billes. Il gagne des billes.

Maintenant il a 61 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Du fait que l'énoncé parle d'un ajout, l'élève est amené à sélectionner le premier schéma, puis à relire l'énoncé pour remplir ce schéma. Il interprète alors 43 comme le nombre initial de billes (celui que l'on met à gauche de la flèche) et 61 comme le nombre final de billes (celui que l'on met à droite de la flèche). D'où le schéma :

$$\begin{array}{r} + ? \\ 43 \rightarrow 61 \end{array}$$

À l'aide de ce schéma, l'enfant peut se rendre compte que le nombre cherché est plus petit que 61 et qu'il convient donc de calculer $61 - 43$ plutôt que $43 + 61$ (ce dernier calcul étant, comme nous l'avons vu, l'erreur la plus fréquente).

En fait, après l'avoir expérimenté, Ermel¹⁰ n'a finalement pas retenu ce type de pratique pédagogique. Parlant de l'usage d'une demi-droite numérique ou de schémas comme les précédents, l'équipe Ermel écrit (p. 99) :

« Force est de constater que, même lorsqu'ils les connaissent, les élèves de CE2 ne recourent pas souvent spontanément aux deux derniers types de représentations pour résoudre des problèmes. Nous avons pu en faire le constat, même après des tentatives d'enseignement volontaristes. Et ceux qui les utilisent (parfois parce qu'ils pensent que c'est ce que l'enseignant attend) ne le font pas toujours de manière pertinente. »

Aux États-Unis, une recherche de Fuson et divers collègues a été menée à son terme, de sorte que l'on dispose de résultats expérimentaux. Ceux-ci montrent que l'utilisation de schématisations conventionnelles améliore globalement les performances d'élèves de CE1. Cependant, un examen plus attentif des résultats révèle que ce sont les meilleurs qui progressent et que, en revanche, il n'y a aucune certitude d'un progrès chez les autres.

Une autre étude¹¹, menée avec des adultes, incite à une prudence encore plus grande. Ces adultes disposent de peu de temps pour choisir la bonne opération face à des énoncés de problèmes d'addition ou de soustraction. Ce manque de temps leur fait commettre des erreurs. Pour pallier celles-ci, l'expérimentateur les entraîne à utiliser des schémas conventionnels. Or, dans certaines conditions, cet entraînement s'est traduit par une régression des performances en résolution de problèmes¹² !

De tels résultats s'expliquent aisément : ces adultes échouent parce qu'ils pensent pouvoir donner une réponse rapide au problème sans construire une représentation mentale du contenu de l'énoncé, en isolant certains mots-clefs (rappelons

qu'ils doivent répondre dans un temps court). Or, plutôt que de les orienter vers une compréhension de l'énoncé qui soit à la fois plus rapide et meilleure, l'entraînement à l'utilisation de schémas conventionnels risque de focaliser leur attention sur des éléments isolés de l'énoncé (pour sélectionner le « bon schéma », pour « bien placer » les nombres, etc.) et de les renforcer ainsi dans l'emploi de la stratégie de recherche de mots-clés.

On remarquera que, il y a vingt-cinq ans environ, les enseignants français ont pu observer un phénomène similaire avec leurs élèves. En effet, après la « réforme des mathématiques modernes » en 1970, on a utilisé durant quelques années les diagrammes de Venn (les « patates ») pour aider les enfants à choisir la bonne opération face à un énoncé de problèmes d'addition ou de soustraction. L'impression générale laissée par ce type de pratique pédagogique était bien celle-là : si elle aidait certains enfants à progresser, elle en éloignait d'autres de la réussite.

D'une manière générale, le projet rénovateur se trouve aujourd'hui confronté à des difficultés importantes. En effet, il est raisonnable de penser qu'aucune rénovation de la pratique pédagogique « dangereuse » n'empêchera que cette pratique ait un effet contrasté, aidant certains enfants à progresser mais faisant obstacle au progrès chez d'autres. Concernant les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout, par exemple, il y a plus de trois ans de décalage développemental entre les premiers enfants qui accèdent au 3^e niveau de résolution de ces problèmes et les derniers. En rénovant la pratique pédagogique « dangereuse », on réduit certainement ce décalage pour certains enfants. Mais, à vouloir que tous les élèves accèdent directement, et presque simultanément, au 3^e niveau, il est vraisemblable que l'on entrave toujours le progrès de certains.

Aussi les pédagogues rénovateurs sont-ils conduits à s'appuyer sur la deuxième dimension de leur projet, la dimension constructiviste. L'équipe Ermel¹³ fait finalement la recommandation suivante :

« Il nous semble raisonnable d'adopter une attitude prudente qui consiste à proposer ces différentes schématisations aux élèves, à les inciter même à les utiliser lorsqu'ils ont à expliquer une procédure à leurs camarades ; mais leur utilisation systématique pour résoudre un problème ne paraît pas souhaitable, les élèves restant libres de les mobiliser ou non. »

Les auteurs préconisent donc une certaine prudence vis-à-vis de l'usage des outils qui sont issus de la rénovation elle-même : il leur semble souhaitable que tous les enfants connaissent ces schématisations et sachent les utiliser lors de phases collectives (il s'agit donc toujours d'un enseignement explicite et simultané du choix de la bonne opération), mais ils recommandent que l'élève, lorsqu'il est confronté seul à un problème arithmétique, soit libre de les utiliser ou non.

10. Ermel, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (deuxième année)*, Paris, Hatier, 1995.

11. Lewis, A.B., « Training Students to Represent Arithmetic Word Problems ». *Journal of Educational Psychology*, 81, 521-531, 1989.

12. Cette recherche concernait des adultes. Cependant les sujets de l'expérience faisaient le même type d'erreurs que les enfants (choix de l'addition dès que l'énoncé parle d'un gain ou dès qu'il contient l'expression « de plus que », par exemple). On peut donc penser que ce type de recherche renseigne quand même sur ce qui se passe avec des élèves de l'école élémentaire.

13. Ermel (1995). *Ibid.*

Une question mérite d'être posée cependant : si, comme certaines recherches le laissent penser, ce genre d'outil ne profite qu'aux meilleurs élèves (et donc, à ceux qui n'en ont peut-être pas besoin), le temps consacré à enseigner les différentes schématisations ne pourrait-il pas être utilisé plus judicieusement ? Ne conviendrait-il pas de substituer à cet enseignement explicite et collectif de la catégorisation à l'aide de schémas conventionnels, un autre enseignement qui favoriserait le progrès de tous les élèves et ne s'opposerait au progrès chez aucun ?

Un exemple d'attitude réformatrice

Une telle attitude s'oppose à la précédente du fait qu'elle conduit à un abandon de la pratique pédagogique « dangereuse » qui consiste à enseigner *explicitement* à l'ensemble des élèves une méthode permettant de choisir la bonne opération. Aucune rénovation de cet enseignement n'est recherchée (d'où l'usage du mot *réforme*). L'enseignant accepte donc *a priori* que les réorganisations permettant l'accès au 3^e niveau de résolution des problèmes n'aient pas lieu simultanément pour tous les élèves.

Si aucune méthode permettant de choisir la bonne opération n'est enseignée, en revanche l'accent est mis sur une pratique pédagogique qui, comme nous le verrons, favorise elle aussi le choix de la bonne opération, mais de manière plus indirecte : l'enseignement du calcul mental. Ainsi, l'apprentissage de la résolution des problèmes au 3^e niveau n'est plus explicite : il est implicite et ne s'effectue pas dans le même temps pour tous les enfants.

On décrira ici une mise en œuvre de ces idées qui repose sur la distinction de deux types de séances en classe. Dans la première, l'enseignant favorise l'apprentissage de savoir-faire fondamentaux comme le calcul mental ; dans la seconde (qui prend la forme de Problèmes pour apprendre à chercher (PAC), il s'agit de créer des conditions permettant de gérer l'accès au 3^e niveau de résolution des problèmes arithmétiques et de le gérer de façon différenciée selon les enfants. On présente ci-dessous chaque type de séances, avant d'analyser leur relation.

Un premier type de séances : enseigner le calcul mental d'une soustraction et d'une division

Un adulte ne calcule pas $104 - 6$ comme il calcule $104 - 98$. Dans le cas de $104 - 6$, il procède par retraits successifs ($104 - 4) - 2$, c'est-à-dire en « reculant ». Et dans le cas de $104 - 98$, il procède par recherche du complément, en « avançant » : « 98 pour aller à 100, il faut 2, et pour aller à 104, 4 de plus, ça fait 6 ». D'une manière générale, on peut donc distinguer « deux grands gestes mentaux » pour le calcul mental d'une soustraction : quand on retire peu, on a intérêt à faire des retraits successifs, à calculer « en reculant », et quand on retire beaucoup, à procéder par complémentation, c'est-à-dire « en avançant ».

Le même raisonnement peut être tenu concernant le calcul mental d'une division. Là encore, un adulte ne calcule pas $1\ 310 : 3$ comme il calcule $168 : 25$. Dans le cas de $1\ 310 : 3$, il procède par partages successifs des centaines ($13 : 3 ?$, 4 et il reste 1, etc.), puis des dizaines, etc. Le quotient s'obtient chiffre par chiffre (dans le cas de $1\ 310 : 3$, le chiffre des centaines est obtenu en premier, puis celui des dizaines, etc.), comme si la division avait été posée. On parlera dans ce cas de l'emploi d'une stratégie de « division-partage ».

En revanche, dans le cas de $168 : 25$, on se demande plus volontiers « En 168 combien de fois 25 ? », ce qui conduit directement à la solution numérique par encadrement de 168 avec des multiples de 25 (6 fois 25, 150 et 7 fois 25, 175). On parlera dans ce cas de « division-groupement » du fait qu'on se demande combien de groupes de 25 on peut faire avec 168.

D'une manière générale, on peut donc distinguer « deux grands gestes mentaux » pour le calcul mental d'une division : quand on divise un grand nombre par un nombre à un chiffre (division par un « petit nombre »), on a intérêt à partager successivement les centaines, dizaines, unités (à mettre en œuvre une « division-partage ») ; et quand on divise un nombre par un autre qui a le même ordre de grandeur (division par un « grand nombre »), à encadrer le premier par des multiples du second, c'est-à-dire à mettre en œuvre une « division-groupement ».

Dans le premier type de séances qui est mis en place dans les classes, on enseigne donc les « deux grands gestes mentaux » du calcul d'une soustraction : en avançant ou en reculant¹⁴, et les « deux grands gestes mentaux » du calcul d'une division : par partages successifs ou par groupement. Deux questions se posent. Comment enseigne-t-on ces stratégies de calcul mental ? En quoi leur maîtrise permet-elle de progresser dans la résolution des problèmes de soustraction ? 1°) La réponse à la première question sera présentée dans le prochain chapitre (il s'agit même du contenu de ce chapitre). Disons seulement ici que le pédagogue réformateur, comme le pédagogue rénovateur, s'efforce de créer des situations d'apprentissage et qu'il favorise le débat entre élèves. Il s'inspire donc de l'attitude constructiviste, mais ce constructivisme n'est pas radical : le pédagogue n'hésite pas à favoriser l'émergence de certains savoir-faire en calcul mental qui, en dehors de sa présence, seraient inaccessibles à la plupart des élèves. Divers résultats expérimentaux montrent, par exemple, que lorsque l'on n'enseigne pas le calcul en avançant d'une soustraction, peu d'enfants inventent ce savoir-faire¹⁵.

14. Il existe des variantes de ces gestes. Pour retirer 19, par exemple, je peux retirer 20 puis compenser ce qui a été retiré en trop. Une autre stratégie consiste à se ramener à une addition connue par cœur ($100 - 25 = 75$ parce que $75 + 25 = 100$, par exemple). Il s'agit là d'une stratégie experte tant du point de vue conceptuel (elle témoigne de la maîtrise de la relation addition-soustraction) que du point de vue des connaissances sur des nombres particuliers.

15. Pour une revue de ces travaux, voir par exemple : Brissiaud, R., *Enseignement et développement des représentations numériques chez l'enfant*, thèse de psychologie (nouveau régime), université Paris-VIII, 1995.

2°) La réponse à la deuxième question sera abordée plus loin dans ce chapitre, après la présentation du second type de séances.

Un second type de séances : les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC)

Régulièrement, les enfants participent à ce qu'on a appelé des Problèmes pour apprendre à chercher (PAC). Une caractéristique fondamentale de ces activités est qu'elles proposent des problèmes dits de soustraction, de multiplication et de division dès le CP et le CE1, avant que les symboles arithmétiques de ces opérations n'aient été étudiés. De même, dès le CE2, les élèves doivent résoudre dans les PAC des problèmes dits de fractionnement ou de proportionnalité, là encore bien avant que les contenus mathématiques correspondants n'aient été étudiés.

Les élèves ne peuvent donc résoudre ces problèmes qu'au 1^{er} ou au 2^e niveau, en adoptant une procédure proche de la simulation. Certains font un schéma, mais très différent des schémas conventionnels que nous avons évoqués précédemment. Si le problème traite d'arbres, par exemple, l'enfant dessine des bâtons et raisonne avec ces bâtons comme s'il s'agissait d'arbres. Il y a donc bien schématisation, mais aucune forme n'est imposée *a priori* pour de tels schémas ; ils constituent une aide éventuelle à la simulation des données de l'énoncé et non un cadre *a priori* auquel l'enfant doit s'adapter. Dès que les quantités en jeu dans le problème sont importantes, il est fréquent que les enfants structurent les collections en les organisant par 10 et dessinent une « barre de 10 » ou une « boîte de Picbille », par exemple, pour représenter 10 arbres. Là encore, on peut parler de schématisation. D'autres élèves résolvent les problèmes dits de division, par exemple, au 2^e niveau en exécutant une suite d'additions, de soustractions ou d'encadrements par des multiples. Qu'il y ait schéma ou pas, ces résolutions se font dans la continuité avec l'expérience quotidienne ; elles restent proches d'une simulation de l'énoncé.

Lorsque le pédagogue vient d'introduire une opération donnée, la division par exemple, au cours d'une séance du premier type, il se garde d'exiger de tous les élèves qu'ils résolvent les problèmes correspondants au 3^e niveau dans les séances de PAC suivantes. Il gère de manière différenciée l'accès au 3^e niveau (d'une façon sur laquelle nous reviendrons). Il se garde également de valoriser publiquement les résolutions à ce niveau. En effet, s'il donnait une meilleure note aux élèves qui atteignent ce niveau ou s'il leur témoignait une approbation privilégiée, l'ensemble des élèves chercherait à résoudre les problèmes de cette manière.

Ainsi, l'enfant qui résout un problème donné en faisant un schéma (au 1^{er} niveau de procédure) est évalué tout aussi positivement que celui qui mobilise directement la bonne opération arithmétique. Il s'agit de créer les meilleures conditions pour que les élèves qui ont encore besoin de schématiser pour comprendre l'énoncé le fassent. Le péda-

gogue est particulièrement prudent avec les « problèmes difficiles » (ceux qui sont révélateurs du niveau conceptuel des enfants), comme la recherche de la valeur d'un ajout ou encore les problèmes de groupement réitéré, parce qu'il est clair que certains enfants ne peuvent pas, pour ces problèmes, atteindre le 3^e niveau dès le CE2.

Une diversité aux multiples vertus pédagogiques

Une caractéristique essentielle des Problèmes pour apprendre à chercher est donc la diversité : diversité au sein d'un même PAC quant à la nature arithmétique des problèmes proposés (addition, soustraction, etc.), diversité quant à la difficulté des différents problèmes, diversité des modes de résolution possibles, diversité aussi quant à la façon de les énoncer (problèmes en image, énoncé verbal...).

Si l'on se place au début du CE2, par exemple, un même PAC pourra comprendre des problèmes faciles d'addition qui sont résolus par tous les enfants au 3^e niveau, des problèmes de division qui ne sont résolus au 3^e niveau par aucun, et des problèmes de soustraction qui ne le sont que par quelques-uns. Or, pour le pédagogue qui souhaite gérer la continuité de l'apprentissage, il est fondamental que les enfants aient eu, sur une longue période, la possibilité de résoudre des problèmes dits de division, par exemple, aux 1^{er} et 2^e niveaux. Il est fondamental qu'ils aient eu cette possibilité longtemps avant qu'ils n'abordent cette opération arithmétique dans le premier type de séances. En effet, être capable de résoudre un problème au 1^{er} ou au 2^e niveau implique qu'on a été capable de comprendre le vocabulaire et la syntaxe de l'énoncé¹⁶, de se représenter mentalement la situation qui y est décrite, d'utiliser une opération arithmétique élémentaire comme l'addition pour résoudre un problème qui le sera plus tard par une division, etc.

Ainsi, lorsque l'enseignant organisera des séances du premier type visant à introduire la division, les élèves n'auront pas tout à apprendre d'un seul coup : ils se seront déjà appropriés les expressions langagières permettant de décrire une situation de division, ils auront déjà eu l'occasion de résoudre ce type de problème par une suite d'additions ou de soustractions, etc. On voit que, globalement, lorsque l'on organise un tel environnement pédagogique, le temps pendant lequel les enfants ont la possibilité d'apprendre est un temps long. La continuité des apprentissages est mieux gérée. Il est raisonnable de penser que l'échec sera moindre.

Si nous voulions, pour favoriser la continuité de l'apprentissage, proposer aux enfants des problèmes dits de soustraction, de multiplication ou de division avant l'introduction

16. Les énoncés de problèmes ont un vocabulaire et une syntaxe spécifiques. On y trouve des locutions langagières comme « des objets à 8 € l'un », « chaque objet vaut 8 € » qui sont très peu utilisées dans le langage quotidien où elles sont même souvent remplacées par une autre, qui est apparemment contradictoire avec elles : « Ces objets, ils valent tous 8 € » ou encore « Tous ces objets valent 8 € ». Il est important que les enfants puissent résoudre des problèmes aux 1^{er} et 2^e niveaux sur une longue durée, parce qu'ils s'approprient ainsi la langue des énoncés.

des différents signes opératoires, il est clair que la diversité décrite plus haut s'imposait.

Mais cette diversité a une autre conséquence positive : face à un problème donné, les élèves ne peuvent pas savoir *a priori* s'ils disposent ou non d'un savoir mathématique permettant de le résoudre au 3^e niveau. Comme tout est possible, le comportement qui consiste à choisir mécaniquement la dernière opération enseignée, par exemple, ne conduit pas à la réussite. D'une façon plus générale, les enfants ne peuvent pas fonder leurs décisions sur des régularités de la vie de la classe (ce que Brousseau appelle le « contrat didactique »). C'est ainsi qu'ils sont toujours amenés à *comprendre les énoncés* qui leur sont proposés, à les aborder en se demandant : de quoi ça parle ?

En première approche donc, ces PAC fonctionnent comme un milieu où le pédagogue a choisi d'adopter une attitude proche de celle que l'on a qualifiée de « constructiviste radicale » ; il se met « en retrait » : il cherche, d'une part, à favoriser l'abord des énoncés (de quoi ça parle ?), et, d'autre part, à favoriser certaines acquisitions langagières grâce à des reformulations, notamment.

Mais l'enseignant a un autre rôle à jouer au cours de ces séances de PAC : il doit repérer, à des moments différents selon les élèves, certains progrès décisifs vers l'accès au 3^e niveau, c'est-à-dire vers la construction des équivalences de gestes mentaux qui fondent la soustraction et la division en tant qu'opérations arithmétiques. Il doit donc gérer les ruptures ou les réorganisations que nous avons annoncées au chapitre 1. Comment peut-il repérer de tels progrès ? C'est ce que nous allons voir maintenant, en montrant que certains problèmes constituent des tâches privilégiées pour le faire. Nous examinerons successivement le cas de la soustraction et de la division. Encore une fois, les problèmes en question sont ceux dont nous avons dit qu'ils sont « révélateurs » du niveau conceptuel des enfants : recherche de la valeur d'un ajout pour la soustraction, et problème de groupement réitéré pour la division. Mais ils ont une caractéristique supplémentaire : leurs valeurs numériques ont été choisies pour favoriser la transition d'un geste mental à l'autre qui lui est équivalent. Si, dans ces circonstances privilégiées, l'élève substitue un geste mental à l'autre, le pédagogue peut considérer qu'il s'agit d'un premier pas vers la résolution au 3^e niveau.

Des problèmes privilégiés pour susciter et repérer le progrès des élèves : le cas de la soustraction

Plaçons-nous dans le cadre d'une classe où l'enseignant a organisé l'environnement didactique qui vient d'être décrit. Il met donc en œuvre deux types de séances. Dans la première, il a enseigné à ses élèves les deux grands gestes mentaux de la soustraction (calcul en avançant et en reculant). Dans la seconde, il leur propose régulièrement des problèmes variés lors de séances de PAC.

Supposons qu'au cours d'une séance de PAC le pédagogue propose le problème suivant de recherche de la valeur d'un ajout :

Pierre a 6 billes.

Il gagne des billes et après il en a 102.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Ce type de problème est particulièrement intéressant parce que l'élève qui se représente mentalement le contenu de cet énoncé est amené à se représenter l'ajout qui y est décrit (Combien faut-il ajouter à 6 pour avoir 102 ?). En revanche, le même élève, s'il veut obtenir la solution numérique de manière économique, n'a pas intérêt à simuler mentalement cet ajout parce que le chemin est long de 6 pour aller à 102 : il faut parcourir 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14... 102. Le calcul économique est un calcul en reculant, c'est celui de $102 - 6$. Les valeurs numériques de cet énoncé de problème (6 et 102) sont choisies de telle sorte qu'elles créent le phénomène suivant : comme toujours, l'énoncé se représente facilement en simulant mentalement l'action qui y est décrite, c'est-à-dire un ajout, mais la solution numérique s'obtient de manière économique en effectuant un retrait. On dira que, dans un tel énoncé, il y a une *interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation (ajout) et l'économie de la résolution numérique (retrait)*.

Ce type de problème s'oppose au problème suivant, qui est également un problème de recherche de la valeur d'un ajout, mais dont les valeurs numériques sont choisies différemment : *Éric a 96 billes.*

Il gagne des billes et après il en a 102.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Le problème d'Éric, comme le problème de Pierre, se représente de manière économique en simulant un ajout ; mais dans le cas du problème d'Éric, cette simulation conduit sans aucun obstacle à la solution numérique : 96 pour aller à 102, il faut parcourir 97, 98, 99, 100, 101, 102, ce qui fait 6. Dans le cas du problème de Pierre, la longueur du parcours « en avançant » fait obstacle à l'obtention de la solution numérique : elle incite les élèves à un changement de geste mental (passer d'un ajout à un retrait), exprimant ainsi « en acte » l'équivalence de ces deux gestes, la plupart du temps sans même en être conscients¹⁷.

Ainsi, le problème de Pierre est particulièrement bien adapté pour que l'enfant découvre ou redécouvre¹⁸ l'équivalence des gestes mentaux qui fonde la soustraction en tant qu'opération arithmétique : il est équivalent de chercher la valeur d'un ajout et le résultat d'un retrait.

Des résultats expérimentaux publiés récemment¹⁹ confortent cette analyse. Ayant proposé en fin de CE1 un problème comme celui de Pierre dans des classes dont l'environnement

17. G. Vergnaud appelle de telles connaissances implicites des « théorèmes en actes ».

18. L'emploi du terme « redécouvre » est préférable. Nous verrons en effet dans le prochain chapitre que l'enseignement des deux grands gestes mentaux du calcul mental d'une soustraction amène l'enfant à une première découverte de l'équivalence qui fonde la soustraction en tant qu'opération arithmétique. Dans les PAC, il est amené à « réinvestir » cette connaissance.

19. Brissiaud, R., « Teaching and Development : Solving "Missing Addend" Problems Using Substraction », in Schneuwly & Brossard (Eds) : « Learning and Development : Contributions from Vygotski », *European Journal of Psychology of Education*, 9 (4), 343-365, 1994.

didactique est celui que nous venons de décrire, une moitié des élèves environ ont « redécouvert » l'usage de la soustraction pour résoudre ce type de problème qui parle d'un ajout. Ils ont utilisé une soustraction alors que personne ne leur avait demandé de « choisir la bonne opération ». Quant aux autres élèves, ils ont presque tous réussi en utilisant des stratégies du 1^{er} ou du 2^e niveau. Globalement, la réussite était de 90 %²⁰.

Les problèmes comme celui de Pierre, où il y a une interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation et l'économie de la résolution numérique, suscitent donc le progrès parce qu'ils incitent l'élève à substituer un geste mental de retrait au geste mental d'ajout.

Avec certains élèves, le dialogue pédagogique auparavant « dangereux » devient possible

Comme nous l'avons signalé, les élèves qui procèdent à une telle substitution ne sont pas, le plus souvent, conscients de ce qu'ils viennent de découvrir « en acte ». C'est de la responsabilité de l'enseignant de favoriser l'explicitation de cette découverte : « Ce que Pierre a gagné, c'est ce qu'il possède maintenant : 102, moins ce qu'il avait déjà avant de jouer, 6. On peut faire une soustraction ».

C'est ainsi qu'avec ces élèves-là, l'enseignant peut dorénavant se permettre un type de dialogue qu'il ne s'autorisait pas auparavant : plutôt que de les ramener systématiquement à la sémantique de l'énoncé (de quoi ça parle ?), il a un échange avec eux concernant l'opération arithmétique qui permet d'obtenir directement la solution. Il les aide à accéder au 3^e niveau de résolution de ce type de problème en mettant à leur disposition des formulations générales : « Ce que Pierre a gagné, c'est ce qu'il possède maintenant moins ce qu'il avait déjà avant de jouer », par exemple, est valable quelles que soient les valeurs numériques du problème. L'enseignant s'appuie sur la découverte que vient de faire l'élève dans des circonstances privilégiées (celles d'un problème où il y a une interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation et l'économie de la résolution numérique) pour l'aider à en prendre conscience et à la généraliser.

Il s'agit donc d'un moment d'explicitation du fait que la soustraction est la « bonne opération » qui permet de résoudre ce type de problème, mais ce moment d'explicitation n'est pas collectif. L'enseignant ne s'adresse ainsi qu'aux élèves qui ont amorcé les réorganisations qui conduisent au 3^e niveau de résolution.

Il reste à savoir comment se comporter avec les autres enfants, ceux qui, « spontanément », ne substituent pas un geste mental de retrait à l'ajout qui est décrit dans l'énoncé, même dans des circonstances favorables comme celles du problème : « Pierre a 6 billes. Il gagne des billes et après il en a 102. Combien a-t-il gagné de billes ? »

20. Ces résultats contrastent avec ceux qui sont généralement obtenus dans un environnement didactique différent : nous avons vu, au début du chapitre, qu'à ce niveau de la scolarité 50 % des élèves échouent à ce type de problème et que, de façon plus précise, 33 % échouent parce qu'ils choisissent de faire une addition.

Deux raisons peuvent être avancées pour expliquer que certains enfants ne soient pas sensibles au phénomène de l'interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation du problème (l'énoncé décrit un ajout) et l'économie du calcul (la solution numérique se détermine facilement par un retrait) : soit il s'agit d'enfants chez qui la construction d'une représentation du problème est encore pénible (peut-être même cette construction nécessite-t-elle encore qu'ils utilisent du matériel ou qu'ils dessinent), soit il s'agit d'enfants chez qui le principe d'économie du calcul ne peut pas encore fonctionner, parce que leurs compétences en calcul mental sont insuffisantes pour qu'une stratégie de calcul (le calcul « en reculant ») leur apparaisse plus facile qu'une autre (le calcul « en avançant »). Pour certains, en effet, à ce moment de leur scolarité, tout calcul mental est encore difficile. Aussi l'une des deux façons de calculer ne peut-elle pas apparaître plus facile que l'autre.

Que la difficulté rencontrée par un élève soit d'une des deux sortes précédentes ou des deux à la fois, la nature de cette difficulté peut amener le pédagogue à considérer qu'il ne peut influencer sur le développement des compétences chez ces élèves que dans une perspective à moyen ou long terme. Il n'est pas exclu, évidemment, qu'ils bénéficient du dialogue que l'enseignant mène avec ceux qui utilisent « spontanément » la soustraction, mais la plus grande prudence s'impose : mieux vaut un élève qui continue à simuler mentalement les actions décrites dans l'énoncé, qu'un autre qui sélectionne une opération arithmétique sur des indices superficiels et ne cherche plus suffisamment à comprendre l'énoncé.

À terme, ces enfants ayant progressé dans les deux domaines précédents (construction de la représentation d'un problème de ce type et calcul mental) sont susceptibles eux aussi de résoudre spontanément les problèmes du type « Pierre » à l'aide d'une soustraction.

L'analyse précédente montre qu'en insérant dans les PAC des problèmes où il y a une interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation et l'économie de la résolution numérique, l'enseignant se donne les moyens pour que les élèves accèdent de façon différenciée à la résolution des problèmes en sélectionnant la « bonne opération arithmétique » (c'est-à-dire au 3^e niveau).

Des problèmes privilégiés pour susciter et repérer le progrès des élèves : le cas de la division

La même analyse peut être menée concernant les problèmes de division. Ainsi, plaçons-nous dans un environnement pédagogique où, dans un premier type de séance, les élèves se sont appropriés les deux grands gestes mentaux de la division (calcul par partages successifs des centaines, dizaines, unités, et calcul en cherchant combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende) et où, dans une seconde sorte de séances (PAC), on leur soumet régulièrement des problèmes variés. On leur propose notamment des problèmes de groupement réitéré qui, contrairement aux problèmes de partage, sont difficiles à reconnaître en tant que problèmes de division,

et sont donc révélateurs du niveau conceptuel des enfants. Mais, comme dans le cas de la soustraction, en choisissant bien les valeurs numériques, on peut favoriser la transition d'un geste mental à l'autre qui lui est équivalent.

Considérons ainsi ce problème de groupement réitéré :

On a 2 236 stylos et on va former des lots de 3 stylos.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des stylos ?

L'élève qui simule mentalement ce que décrit cet énoncé est amené à se représenter les groupements successifs par 3 (Combien de groupes de 3 puis-je former avec 2 236 unités ? Plus de 100 parce que ça fait 300 stylos. Moins de 1 000 parce que ça fait 3 000 stylos, etc.). Mais cet élève, s'il maîtrise les deux grands gestes mentaux de la division, obtiendra la solution numérique ($q = 745$, $r = 1$) de manière plus économique en partageant successivement les centaines, dizaines et unités (22 centaines divisées par 3, cela fait 7 centaines et il reste 1 centaine, etc.).

Les valeurs numériques de ce problème (2 236 et 3) sont choisies de telle sorte qu'elles créent le phénomène suivant : l'énoncé se représente facilement en simulant mentalement le groupement réitéré qui y est décrit, mais la solution numérique s'obtient de manière économique en effectuant un partage successif des centaines, dizaines et unités. On dira là encore que dans cet énoncé, il y a une *interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation (groupement) et l'économie de la résolution numérique (partage)*.

Ce type de problème s'oppose au suivant, qui est également un problème de groupement réitéré, mais dont les valeurs numériques sont choisies différemment :

On a 2 236 crayons et on va former des lots de 250 crayons.

Combien de lots peut-on former ?

Restera-t-il des crayons ?

Ce deuxième problème, comme le premier, se représente de manière économique en simulant le groupement réitéré, mais ici, la simulation conduit sans aucun obstacle à la solution numérique : 4 fois 250, c'est 1 000, 8 fois 250 c'est 2 000 et il reste 236. Le même geste mental, celui du groupement réitéré, permet à la fois de se représenter l'énoncé et d'obtenir la solution numérique. Ce problème ne permet d'aucune façon de construire l'équivalence de deux gestes mentaux. Le premier problème a des caractéristiques didactiques intéressantes car, comme dans le cas de la soustraction, il permet de susciter et de repérer le progrès des enfants vers la résolution des problèmes de division au 3^e niveau.

Ainsi, supposons que ce problème ait été introduit dans une séance de PAC et envisageons le cas d'un élève qui l'a résolu en utilisant une procédure « de base » (1^{er} ou 2^e niveau), c'est-à-dire proche de la simulation du groupement réitéré décrit dans l'énoncé : 100 groupes, ça fait 300 stylos, je suis loin de 2 236 ; 500 groupes, ça fait 1 500 stylos, etc. Le pédagogue, en fin de résolution, peut mener un dialogue avec cet élève pour qu'il prenne du recul avec la situation concrète qui est décrite dans l'énoncé (celle des stylos) et qu'il prenne conscience que, de façon plus générale, il a cherché combien de fois le nombre 3 est contenu dans 2 236. L'élève

est ainsi susceptible de reconnaître qu'il vient de mettre en œuvre l'un des deux gestes mentaux de la division (en 2 236, combien de fois 3 ?) et de s'apercevoir que l'autre geste (le partage successif des centaines, dizaines et unités) l'aurait conduit beaucoup plus rapidement à la solution numérique (il peut le vérifier en procédant effectivement à ce partage). Nous avons, dans le chapitre 1, montré que l'équivalence de ces deux gestes mentaux fonde la division en tant qu'opération arithmétique. Or, c'est cette équivalence qui est en jeu dans le dialogue précédent : le pédagogue motive l'élève à ne plus systématiquement s'engager dans la simulation mentale des actions décrites dans l'énoncé, à prendre un petit temps de recul pour reconnaître éventuellement le problème comme « problème de division » et mener ensuite un calcul plus économique.

Bien entendu, là encore, un tel dialogue n'est pas possible avec tous les élèves. En particulier, seule une certaine aisance en calcul mental permet de faire fonctionner la notion de « calcul économique ». Parce que certains élèves ont encore besoin de progresser en calcul mental et dans la représentation du contenu d'un énoncé de ce type, leur cheminement sera plus lent. Mais encore une fois, rien ne sert de hâter l'exigence d'une résolution au 3^e niveau. L'environnement didactique qui vient d'être décrit est susceptible de permettre à tous de progresser parce que l'enseignant y gère de façon différenciée les réorganisations qui permettent l'accès à la résolution des problèmes au 3^e niveau.

Ainsi, cette distinction de deux types de séances, qui sont pensées de façon articulée, permet :

1°) de mieux gérer les continuités avec l'expérience quotidienne parce que les élèves sont amenés à résoudre les problèmes au 1^{er} ou 2^e niveau sur une longue durée ;

2°) de favoriser au mieux les réorganisations qui conduisent aux opérations arithmétiques parce que le pédagogue met à la disposition des enfants un outil culturel qui joue vraisemblablement un rôle majeur dans l'accès à ces réorganisations : le calcul mental ;

3°) de gérer de façon différenciée ces réorganisations.

Cette distinction de deux types de séances, crée un nouveau rapport entre l'enseignement des savoir-faire arithmétiques et l'utilisation de ces savoir-faire pour résoudre des problèmes.

Conclusion

Deux points seront successivement abordés dans cette conclusion. On présentera d'abord un résumé de la description des quatre attitudes. On terminera ce chapitre en revenant sur l'attitude qui a été le plus longuement présentée : l'attitude réformatrice. Nous montrerons que cette attitude réformatrice est « d'inspiration vygotskienne ». C'est, en effet, la théorie de l'articulation entre l'enseignement et le développement de Vygotski qui nous a servi de guide pour élaborer l'environnement didactique présenté ici comme relevant d'une attitude réformatrice.

Les principales idées qui sont à la base de l'attitude réformatrice seront reformulées ici en s'exprimant « comme

Vygotski », pour, à la fois, permettre une appréhension synthétique de ces idées et éclairer le lecteur sur leur origine.

Les quatre attitudes (résumé)

Enseigner explicitement et collectivement aux élèves à choisir « la bonne opération arithmétique » face à un énoncé de problème est une pratique pédagogique « dangereuse ». Elle est dangereuse parce qu'elle a un effet contrasté, favorisant apparemment le progrès chez certains élèves, mais y faisant obstacle chez d'autres...

Quatre attitudes concernant l'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes ont été distinguées dans ce chapitre. Pour deux d'entre elles, la traditionnelle et la rénovatrice, cette pratique pédagogique est maintenue (partie gauche des schémas ci-après). Dans les deux autres, à savoir l'attitude constructiviste radicale et l'attitude réformatrice, elle est abandonnée (partie droite des schémas).

Mais d'autres oppositions permettent de comparer ces différentes attitudes. Ainsi, l'attitude traditionnelle s'oppose à toutes les autres (fig. 1) du fait qu'elle considère l'enfant comme incapable de résoudre un problème donné tant qu'on ne lui a pas enseigné le contenu mathématique correspondant.

L'élève est-il considéré comme incapable de résoudre un problème avant tout enseignement des opérations ?

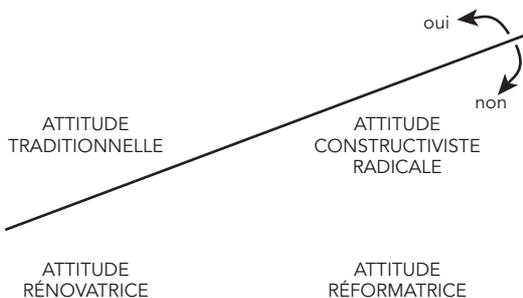


Fig 1 : L'opposition entre l'attitude traditionnelle et les autres.

L'attitude constructiviste radicale s'oppose aussi à toutes les autres (fig. 2) du fait qu'elle considère qu'il suffirait que les enfants soient mis en situation de résolution de problèmes pour qu'ils progressent vers le niveau le plus expert. Ainsi, il ne serait nullement urgent d'introduire le symbolisme arithmétique (les signes « - », « x », « : ») et les techniques mentales et écrites qui les accompagnent. C'est encore aujourd'hui l'attitude dominante en France concernant la division²¹.

Dans les trois autres attitudes, on considère qu'il est de la responsabilité de l'enseignant de mettre à la disposition de l'enfant ces outils culturels.

L'enseignant est-il considéré comme jouant un rôle majeur de par les outils culturels qu'il met à la disposition de l'enfant ?

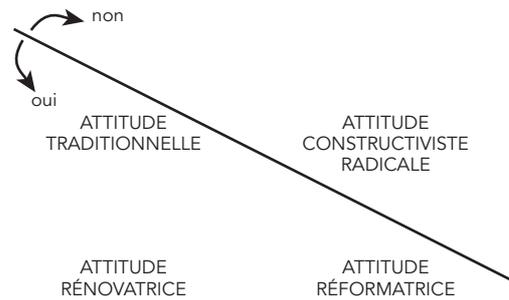


Fig 2 : L'opposition entre l'attitude constructiviste radicale et les autres.

L'attitude rénovatrice et l'attitude réformatrice s'opposent donc aux deux autres (fig. 3) du fait qu'elles tentent de tenir compte à la fois de l'apport nécessaire de l'élève (c'est la dimension constructiviste de ces attitudes) et de l'apport tout aussi nécessaire de l'enseignant (c'est leur dimension culturelle).

Elles peuvent être qualifiées de « socioconstructivistes ».

Est-il tenu compte à la fois de l'apport nécessaire de l'enseignant et de l'enfant ?

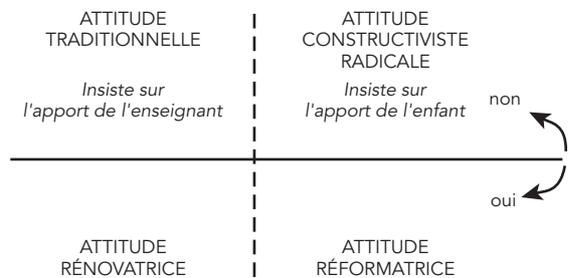


Fig 3 : Deux approches socioconstructivistes différentes.

Mais elles s'opposent de manières différentes (fig. 4) aux attitudes traditionnelle et constructiviste radicale : dans l'attitude rénovatrice, la pratique pédagogique consistant à enseigner explicitement et collectivement le choix de la bonne opération est rénovée, mais maintenue, alors que dans l'attitude réformatrice, cette pratique est abandonnée ; c'est un apprentissage implicite du choix de la bonne opération qui est favorisé, grâce à l'enseignement des deux grands gestes mentaux du calcul d'une soustraction et d'une division.

Enseigne-t-on explicitement et collectivement à choisir la bonne opération arithmétique ?

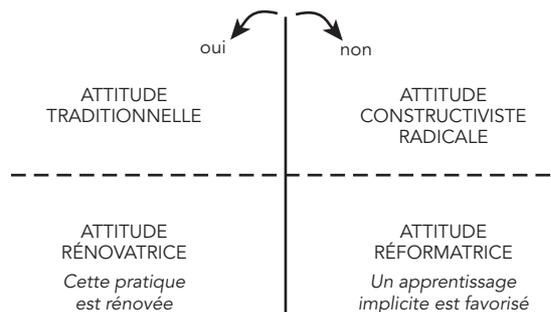


Fig 4 : L'opposition entre l'attitude rénovatrice et l'attitude réformatrice.

21. C'est vraisemblablement une conséquence du choix fait par l'équipe Ermel de retarder l'introduction du signe « : » (« divisé ») au CM1 alors qu'elle a opté pour une introduction du signe « - » la même année que le signe « + ». Dans le cadre de l'analyse proposée ici, ces auteurs ont une attitude constructiviste radicale concernant la division et rénovatrice concernant la soustraction.

L'attitude réformatrice décrite ici est d'« inspiration vygotkienne »

D'une manière générale, Vygotski²² a cherché à penser le processus d'appropriation des connaissances par l'enfant. La difficulté d'un tel projet réside dans le rôle nécessairement majeur qu'il convient d'accorder à l'enfant (c'est lui qui apprend), alors que ce sont les adultes qui sont les dépositaires privilégiés des connaissances qu'il doit s'approprier. Aussi l'enseignement n'a-t-il pas toujours un rôle bénéfique. Vygotski affirme ainsi que certains enseignements sont susceptibles d'« exercer une influence inverse sur le cours du développement » (*Pensée et langage*, p. 276). Selon l'analyse faite ici, l'enseignement explicite et collectif du choix de la « bonne opération » est un exemple de pratique pédagogique susceptible d'« exercer une influence inverse sur le cours du développement ».

Mais, dans le même temps, Vygotski avance que « le bon enseignement est celui qui précède et guide le développement ». Plus précisément encore, il distingue les concepts quotidiens et les concepts scientifiques (l'ajout, le retrait, le groupement et le partage sont des concepts quotidiens alors que l'addition et la soustraction, la multiplication et la division sont des concepts scientifiques) et il considère que la psychogenèse des concepts scientifiques est particulièrement dépendante de l'enseignement.

En effet, l'enseignement crée d'emblée les conditions pour que les concepts scientifiques s'organisent en systèmes et ne soient pas, comme les quotidiens, pris dans la gangue de l'expérience. À cet égard, le symbolisme joue un rôle crucial. La locution « a divisé par b » et l'écriture « $a : b$ », par exemple, fournissent un mode général de désignation du partage, comme du groupement. La locution « a divisé par b » peut se reformuler indifféremment : « a partagé en b » ou encore « en a combien de fois b », ce qui favorise l'organisation du partage et du groupement en un système arithmétique.

Lorsqu'il décrit les liens entre les deux sortes de concepts, Vygotski affirme que les concepts scientifiques se développent sur la base des concepts quotidiens, mais qu'ils transforment ces derniers « à leur image » (*Pensée et langage*, p. 311). C'est la même idée que nous avons abordée ici en parlant de « réorganisations ».

Pour l'enseignant qui considère que l'enseignement explicite et collectif du choix de la « bonne opération » est « susceptible d'exercer une influence inverse sur le cours du développement », trois questions se posent :

Question n° 1 : Quel est ce « bon enseignement » qui précède le développement de la capacité à résoudre les problèmes au 3^e niveau, qui anticipe et favorise les réorganisations nécessaires ?

Question n° 2 : Comment favoriser ces réorganisations en permettant qu'elles se construisent sur la base de l'expérience quotidienne ?

Question n° 3 : Comment reconnaître si le « bon enseignement » évoqué ci-dessus a produit l'effet qu'on en attend, au sens où le dialogue auparavant « dangereux » est maintenant possible, et même bénéfique, parce qu'anticipateur de progrès futurs ? Vygotski aurait dit : comment reconnaître que ce « bon enseignement » a créé une « Zone de Proche Développement » ?

C'est pour répondre à ces trois questions que nous avons été amenés à distinguer deux types de séances et à gérer, en quelque sorte, deux temporalités. Le temps d'un premier type de séances est un temps collectif où, en collaboration avec l'adulte, l'ensemble des enfants s'approprient certains outils culturels susceptibles, à terme, de favoriser les réorganisations. Le temps d'un second type de séances est un temps plus individualisé : c'est le temps de ces réorganisations elles-mêmes. L'analyse présentée dans les deux premiers chapitres permet de répondre à la question n° 1 : l'enseignement du calcul mental d'une soustraction et d'une division, dans le premier type de séances, est ce « bon enseignement » qui précède et guide les réorganisations qui conduisent aux concepts arithmétiques de soustraction et de division.

Nous avons essayé d'analyser de façon détaillée les processus psychologiques qui expliquent que le calcul mental peut avoir un tel rôle bénéfique. Essayons de les décrire en employant le langage de Vygotski.

Enseigner aux enfants (dans le premier type de séances) qu'il existe deux grands gestes mentaux pour calculer une soustraction $a - b$ (le calcul en avançant et le calcul en reculant), c'est prendre comme *point de départ* une même écriture ($a - b$) et amener l'enfant à choisir parmi deux gestes mentaux différents. En revanche, dans les séances du second type (les Problèmes pour apprendre à chercher), l'enfant doit résoudre des problèmes de soustraction variés : recherche du résultat d'un retrait (problème facile) et recherche de la valeur d'un ajout (problème difficile). Dans ce cas, c'est la simulation (mentale ou par le dessin) des données des énoncés qui conduit à deux gestes mentaux très différents : un geste mental « en reculant » pour déterminer le résultat d'un retrait, et « en avançant » pour déterminer la valeur d'un ajout. Ces deux gestes mentaux différents sont alors *au point de départ* et c'est seulement après que l'enfant adopte éventuellement la même écriture $a - b$ pour les deux types de problèmes.

On voit que dans le premier type de séances, on part d'une même écriture $a - b$ vers deux gestes mentaux différents alors que dans le second type de séances (PAC), le cheminement se fait de deux gestes mentaux différents vers la même écriture $a - b$. Il se fait donc en sens inverse.

Le cheminement de l'élève dans le second type de séances est ainsi une sorte de « reflet » de ce qu'il a été dans le premier type. En s'exprimant comme Vygotski, on peut dire que, dans les PAC, l'enfant reprend à son propre compte ce qu'il a rencontré initialement, grâce à la coopération de l'adulte, dans les séances du premier type.

22. L'ouvrage de référence est le suivant : Vygotski, L. S., *Pensée et langage*, Paris, Éditions Sociales (trad. F. Sève), 1934/1985.

L'enseignement des deux gestes mentaux du calcul mental de $a - b$ anticipe ainsi sur la reconstruction par l'enfant des équivalences de gestes mentaux qui fondent la soustraction en tant qu'opération arithmétique. C'est le « bon enseignement qui guide le développement ».

De même, en enseignant à l'ensemble des enfants, dans le premier type de séances, qu'une même écriture $a : b$ peut conduire à deux gestes mentaux très différents, soit le partage successif des centaines, dizaines, unités, soit l'encadrement par des multiples (le cheminement va alors de l'écriture $a : b$ vers des gestes mentaux différents), on les aide à redécouvrir à titre personnel que des problèmes *a priori* très différents, comme la recherche des résultats d'un partage et la recherche des résultats d'un groupement réitéré, peuvent être traités par la même opération $a : b$ (le cheminement va alors « en sens inverse », c'est-à-dire des gestes mentaux vers l'écriture). L'enseignement des deux grands gestes mentaux du calcul d'une division aide donc les enfants à s'approprier l'équivalence qui fonde la division en tant qu'opération arithmétique. Il s'agit là encore du « bon enseignement qui guide le développement ».

En réponse à la question n° 2 (Comment favoriser les réorganisations en permettant qu'elles se construisent sur la base de l'expérience quotidienne ?), nous avons vu comment la distinction de deux types de séances permet de mieux gérer les continuités avec l'expérience quotidienne parce que les élèves sont amenés à résoudre les problèmes au 1^{er} ou au 2^e niveau sur une longue durée.

En réponse à la question n° 3 (Comment reconnaître que le « bon enseignement » évoqué ci-dessus a produit l'effet

qu'on en attend... ?), nous avons souligné le rôle crucial des problèmes pour lesquels il y a une *interaction conflictuelle entre l'économie de la représentation et l'économie de la résolution numérique*. Ils favorisent en effet la substitution d'un geste mental à l'autre qui lui est équivalent.

Lorsqu'un pédagogue utilise ces problèmes au sein des PAC, il crée des conditions privilégiées pour que certains élèves procèdent effectivement à cette substitution. De nouvelles possibilités de dialogue entre l'adulte et certains de ces élèves se révèlent ainsi. On peut dire, en s'exprimant comme Vygotski, que l'enseignement du calcul mental a créé, chez ces élèves, une « Zone de Proche Développement ».

Cette façon de s'exprimer est évidemment très philosophique, mais nous espérons qu'elle l'est au bon sens du terme, dans la mesure où elle rend compte de processus que nous nous sommes efforcés de décrire le plus finement possible.

Terminons en expliquant pourquoi cette attitude n'est pas qualifiée de « vygotskienne », mais seulement « d'inspiration vygotskienne ». C'est essentiellement parce que le cadre théorique tracé par le psychologue russe au début du xx^e siècle est très général et que, plus de cinquante ans après, plusieurs mises en œuvre de ses idées peuvent certainement être avancées. Il existe nécessairement une certaine distance entre les propositions qui ont été faites ici et d'autres qui prétendent tout autant s'inspirer de ses travaux. Il nous semble sain de le souligner.

En fait, nous n'avons qu'une seule certitude : la théorie de l'articulation entre l'enseignement et le développement de Vygotski a joué un rôle heuristique majeur dans l'élaboration des propositions théoriques qui viennent d'être décrites.

Chapitre 3

Enseigner la division euclidienne

PLAN DU CHAPITRE

- Quotition et partition.
- Introduire le signe « : » tôt dans l'année de CM1.
 - Pour enseigner le calcul réfléchi d'une division, il faut disposer du signe « : ».
 - Quelle écriture pour désigner une division ?
- La progression en calcul mental.
 - Les quatre sortes de problèmes qui jalonnent la progression.
 - Quel geste mental enseigner en premier, ou encore quelle situation d'introduction de l'écriture $a : b$?
 - Apprendre que la division permet aussi de résoudre des problèmes de partition.
 - Apprendre à mettre en œuvre le geste mental de la partition.
 - Une technique où l'on partage successivement les centaines, dizaines, etc.
 - Une technique écrite au service du calcul mental.
 - En grande partie, c'est dans les PAC que les enfants construisent leurs compétences.
- La technique écrite de la division par un nombre à plusieurs chiffres.
 - La technique écrite au service de la coordination des deux gestes mentaux de la division.
 - Les divisions du type $236 : 38$?
 - Quels choix pour apprendre à coordonner les deux gestes mentaux au sein de la technique ?
- Conclusion : une comparaison avec les progressions antérieures.

Dans les chapitres précédents, nous avons montré qu'il existe deux « grands gestes mentaux » du calcul d'une division euclidienne : le premier relève d'une « division-partage » (le calcul se fait par partages successifs des centaines, dizaines et unités du dividende) et le second d'une « division-groupement » (il s'agit de chercher : « En a , combien de fois b ? »). Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter les notions de « division-partition » et de « division-quotition », qui généralisent celles de « division-partage » et de « division-groupement ».

Nous avons également montré que l'enseignement des deux « grands gestes mentaux » du calcul d'une division favorise le progrès des enfants vers la résolution au 3^e niveau des problèmes de division. Les savoir-faire en calcul mental ne doivent donc pas être considérés comme des connaissances « optionnelles », dont on se réjouit que l'enfant les possède, quand c'est le cas, mais qui n'auraient aucun caractère d'urgence. De notre point de vue, il s'agit bien au contraire de savoir-faire fondamentaux, dont l'appropriation par l'enfant conditionne ses progrès futurs.

Au chapitre 2, nous avons présenté les principales caractéristiques d'une conception « réformatrice » de l'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes. Sa mise en œuvre repose sur la distinction de deux types de séances : d'une part, des séances où l'on favorise l'appropriation par l'enfant de savoir-faire fondamentaux comme le calcul mental d'une division, et, d'autre part, des séances de résolution de problèmes ou PAC (Problèmes pour apprendre à chercher). Dans les PAC, les élèves sont confrontés à la résolution de problèmes de division dès le début de l'année, c'est-à-dire avant d'avoir étudié cette opération arithmétique dans le premier type de séance. Les élèves qui ont utilisé *J'apprends les maths* au CE2 se sont déjà exercés au calcul mental d'une division, les autres peut-être pas, mais dans tous les cas les élèves doivent avoir la possibilité de résoudre les problèmes de division qu'on leur propose tôt dans l'année, de façon informelle, en utilisant les opérations qu'ils maîtrisent déjà : addition, soustraction, multiplication.

L'enseignement des deux grands gestes mentaux de la division se situe évidemment dans le premier type de séance ; un horaire important lui est même consacré.

Mais une question est restée en suspens : *comment penser cet enseignement du calcul mental d'une division ?* Le chapitre 3 est, pour l'essentiel, consacré à cette question.

Cependant, le calcul mental d'une division n'est possible que dans les cas simples. Quand la division est plus complexe ($9\ 837 : 23$?, par exemple), nous défendrons l'idée que les élèves doivent disposer d'une *technique écrite* pour les calculer et nous présenterons une progression permettant l'enseignement d'une telle technique. Nous concluons enfin par une comparaison avec les progressions antérieures.

Quotition et partition

Nous avons jusqu'ici distingué deux sortes de problèmes et deux sortes de gestes mentaux correspondant à la division

euclidienne : la « division-partage » et la « division-groupement ». Or, considérons ce problème : « 12 objets valent 276 €. Quel est le prix d'un objet ? », ou encore celui-là : « Quand on met bout à bout 12 baguettes identiques, la longueur totale est de 276 cm. Quelle est la longueur d'une baguette ? »

Il ne s'agit pas à proprement parler de problèmes de partage et pourtant le premier peut se résoudre en s'imaginant le partage de 276 pièces de 1 € entre les 12 objets qu'elles permettent d'acheter, et le second en s'imaginant le partage d'une baguette de 276 cm de longueur en 12 morceaux identiques. Ces problèmes ne sont pas des problèmes de partage, mais ils en sont proches. Ce sont des problèmes où l'on cherche la valeur d'une unité quand on a la valeur d'une totalité. Ils forment, avec ceux où l'on cherche la valeur d'une part, la catégorie plus générale des problèmes de *partition*. De même, considérons ces problèmes : « Des objets valent 23 € l'unité. J'en achète pour 276 €. Combien en ai-je achetés ? », et « Des baguettes identiques mesurent chacune 23 cm de longueur. On en juxtapose jusqu'à former une longueur totale de 276 cm. Combien en a-t-on juxtaposées ? »

Le premier problème n'est pas à proprement parler un problème de groupement et pourtant on peut le résoudre en s'imaginant en train de former des groupes de 23 pièces de 1 € jusqu'à ce que la valeur totale soit de 276 €. Le même raisonnement peut être tenu avec le second problème. Il ne s'agit pas de problèmes de groupement, mais ils en sont proches : on parlera de problèmes de *quotition*. Les problèmes de quotition sont non seulement ceux où l'on cherche combien de groupes de b objets on peut former avec a objets, mais plus généralement tous ceux qu'on peut reformuler ainsi : en a , combien de fois b ?

Les notions de partition et de quotition sont plus générales que celles de partage et de groupement. Leur introduction permet de rendre compte de la résolution d'un plus grand nombre de problèmes. Alors qu'au CE2 nous parlions de « division-partage » et de « division-groupement », nous parlerons désormais de « division-partition » et de « division-quotition ».

Introduire le signe « : » tôt dans l'année de CM1

Ce choix ne va pas de soi car de nombreux pédagogues considèrent que durant la majeure partie du CM1, il suffit de procéder à une première approche de la division. Longtemps dans l'année, le seul travail que ces pédagogues proposent à leurs élèves est celui qu'on trouve ici dans les PAC ; il consiste en la résolution informelle de problèmes. Ces enseignants n'introduisent pas le signe « : », les élèves doivent seulement résoudre des problèmes de division en utilisant les opérations qu'ils maîtrisent bien : addition, soustraction et multiplication. En revanche, nous allons montrer que le pédagogue réformateur d'inspiration vygotkienne (cf. chapitre 2) qui veut enseigner les deux grands gestes du calcul mental d'une division doit nécessairement introduire le signe « : » tôt dans l'année de CM1.

Rappelons d'abord qu'enseigner les deux grands gestes mentaux du calcul mental d'une division, c'est amener l'élève, lorsqu'il est confronté à un calcul qui lui a été posé sous la forme générale « a divisé par b », à choisir lui-même le geste mental qui est adapté. C'est pourquoi on peut parler du *calcul réfléchi* ou encore du *calcul pensé* d'une division. S'il s'agit de calculer 171 divisé par 25, par exemple, le geste mental le plus approprié consiste à se demander combien de fois 171 contient 25 (4 fois 25 égale 100, 6 fois 25 égale 150, donc $q = 6$ et $r = 21$). Il s'agit donc d'une « division-quotition » où l'on situe 171 parmi les multiples de 25.

Plus généralement, lorsque les deux nombres ont le même ordre de grandeur (quand le diviseur est un « grand nombre » ou encore quand le quotient a 1 chiffre), c'est la division-quotition qui conduit le plus facilement à la solution numérique. En revanche, s'il s'agit de calculer 587 divisé par 3, le geste mental le plus approprié est celui qui consiste à partager les 5 centaines en 3, puis les 28 dizaines restantes en 3, etc. Le calcul se déroule comme si l'on « posait » la division dans sa tête : 5 centaines partagées entre 3 personnes, ça fait 1 centaine chacun et il reste 2 centaines, c'est-à-dire 20 dizaines. Avec les 8 dizaines de 587 (« j'abaisse le 8 »), cela fait 28 dizaines à partager entre 3 personnes... On obtient finalement le quotient $q = 195$ et le reste $r = 2$.

Plus généralement, quand on divise par un « petit nombre » (par un nombre à 1 chiffre), c'est la division-partition qui conduit le plus facilement à la solution numérique.

Pour enseigner le calcul réfléchi d'une division, il faut disposer du signe « : »

Si le pédagogue ne dispose pas du signe « : » et de la locution « a divisé par b » qui l'accompagne, il est obligé de poser le calcul d'une division en « racontant une histoire ». Soit : « On partage équitablement a objets entre b personnes, etc. ». Soit : « On dispose de a objets et on les groupe par b , etc. ». Or, nous allons voir qu'aucune de ces façons de contextualiser le calcul n'est satisfaisante parce que aucune ne permet d'être sûr que l'élève sait faire du calcul réfléchi. S'il s'agit de la division de 587 par 3, par exemple, faire du calcul réfléchi c'est adopter la division-partition parce qu'elle conduit au calcul le plus simple. Or, si le pédagogue contextualise ce calcul en disant « On partage équitablement 587 objets entre 3 personnes », beaucoup de ses élèves choisissent une division-partition parce qu'ils simulent mentalement l'action décrite dans l'énoncé. Ce n'est donc pas parce que le partage conduit au calcul le plus économique qu'ils le sélectionnent en tant que « bon geste mental ». Ils ne font pas du calcul réfléchi.

L'autre possibilité est que le pédagogue contextualise le calcul ainsi : « On a 587 objets et on fait des groupes de 3 ». Cependant, la sémantique du groupement ainsi retenue risque d'entraîner les élèves dans une simulation mentale de ce groupement et de faire ainsi obstacle au choix de la division-partition. Des élèves qui auraient réussi avec un vocabulaire général échouent dans ce cas parce qu'on leur a tendu une sorte de piège !

L'analyse précédente souligne l'intérêt d'un vocabulaire général : comme il ne s'identifie ni au vocabulaire du partage, ni à celui du groupement, il crée un cadre formel qui, à terme, va permettre que l'élève construise le concept scientifique de division à partir des concepts quotidiens de partage et de groupement.

Le pédagogue qui partage l'analyse vygotkienne de l'appropriation du concept arithmétique de division que nous avons proposée, se doit d'introduire, le plus tôt possible, un vocabulaire général et une écriture pour la division. Sans écriture générale, pas de « bon enseignement qui précède, qui guide le développement ».

Mais une question se pose : quelle écriture doit-on retenir ?

Quelle écriture pour désigner une division ?

La difficulté provient du fait que le résultat d'une division euclidienne n'est pas composé d'un mais de deux nombres : le quotient et le reste.

Avant 1980¹, de nombreux pédagogues adoptaient les deux points superposés (« : ») et écrivaient sans état d'âme :

$$35 : 8 = 4 \text{ (reste 3).}$$

Les réformateurs de 1980 ont critiqué ce choix car le signe « = » ne s'emploie que lorsqu'il y a la même quantité de part et d'autre de ce signe.

L'égalité $35 : 8 = 4 \text{ (reste 3)}$ est tout à fait incorrecte. Son emploi habituerait les élèves à un usage non mathématique du signe « = ». Au niveau du collège, ils risqueraient d'être en difficulté dans l'apprentissage de l'algèbre, parce qu'il est très important, à ce moment de la scolarité, d'avoir une bonne compréhension du signe « = ».

D'autres pédagogues utilisent eux aussi les deux points superposés (« : »), mais seulement dans le cas de la division exacte, lorsque le reste est nul. Il est en effet parfaitement correct d'écrire que $27 : 3 = 9$.

Mais du coup, ces pédagogues sont démunis pour écrire une égalité dès que le reste est différent de zéro. Or, nous venons de le voir, l'absence d'écriture entraîne l'absence d'un enseignement du calcul réfléchi d'une division, et l'absence d'un tel enseignement pénalise le progrès en résolution de problèmes. Que faire ?

Nous proposons de remplacer l'usage du signe « = » par celui du point d'interrogation en questionnant les élèves sous la forme : $147 : 25 ?$.

Les élèves répondent en écrivant les deux nombres solutions (q et r) et l'égalité qui relie le dividende, le diviseur, le quotient et le reste : « $q = 5, r = 22$ car $147 = (25 \times 5) + 22$ ». Pour que les élèves s'approprient ce format de réponse, les premières interrogations prennent ainsi la forme suivante :

$$q = \dots$$

$$80 : 25 ? \quad \text{car } 80 = (25 \times \dots) + \dots$$

$$r = \dots$$

1. 1980 est une date charnière dans la pédagogie de la division à l'école élémentaire. C'est vers cette date en effet que la première équipe Ermel diffuse largement ce qu'on a souvent appelé « la nouvelle division » (voir la conclusion de ce chapitre).

En toute rigueur, il faudrait préciser que le reste trouvé est inférieur à 25, mais la nécessité d'un reste inférieur au diviseur est intégrée à la définition de l'opération dès son introduction.

La progression en calcul mental

Les questions auxquelles il faut répondre pour élaborer une progression sont nombreuses : Quel sens faut-il donner au signe « : » lors de son introduction : le partage (partition) ou le groupement (quotition) ? Si l'on a choisi l'un de ces sens, comment faire pour que la même écriture ($a : b ?$) acquière l'autre sens ?

Ce qui peut se formuler aussi de la manière suivante : comment faire pour que la même écriture $a : b ?$ conduise les enfants à deux gestes mentaux très différents selon les valeurs numériques de a et de b ?

Le concept central que nous utiliserons pour penser une progression est celui de *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*.

L'utilisation de ce concept amène à distinguer quatre sortes de problèmes qu'il va nous falloir ordonner parce qu'ils constitueront autant de jalons sur le parcours des enfants.

Les quatre sortes de problèmes qui jalonnent la progression

Ces problèmes sont obtenus en croisant deux facteurs :

- La sémantique de l'énoncé qui détermine l'économie de la représentation : l'énoncé décrit-il une situation de groupement réitéré (quotition) ou de partage équitable (partition) ?
- La taille relative des nombres qui détermine l'économie du calcul : les deux nombres de l'énoncé ont-ils le même ordre de grandeur (le quotient aura 1 chiffre) ou bien s'agit-il d'un « grand nombre » et d'un nombre à 1 chiffre ?

Les deux facteurs qui déterminent l'économie de la représentation et du calcul

Premier facteur : la sémantique de l'énoncé

On dispose de a objets et on fait des groupes de b objets.

Combien de groupes peut-on former ?

Représentation économique : quotition

On partage équitablement a objets entre b personnes

Combien d'objets chacune aura-t-elle ?

Représentation économique : partition

Second facteur : les valeurs numériques

$a = 171$ et $b = 25$ $171 : 25 ?$

Calcul économique : quotition

$a = 587$ et $b = 3$ $587 : 3 ?$

Calcul économique : partition

Les 4 énoncés obtenus en croisant ces deux facteurs sont rapportés ci-après.

Quatre problèmes qui jalonnent la progression

Problème A

On dispose de 171 objets et on fait des groupes de 25.
Combien de groupes peut-on former ?

Représentation économique : quotition
Calcul économique : quotition

Problème B

On partage équitablement 171 objets entre 25 personnes.
Combien d'objets chacune aura-t-elle ?

Représentation économique : partition
Calcul économique : quotition

Problème C

On partage équitablement 587 objets entre 3 personnes.
Combien d'objets chacune aura-t-elle ?

Représentation économique : partition
Calcul économique : partition

Problème D

On dispose de 587 objets et on fait des groupes de 3.
Combien de groupes peut-on former ?

Représentation économique : quotition
Calcul économique : partition

Dans les problèmes B et D, il y a donc un *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*, au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est différent de celui qui conduit à un calcul économique. Ces problèmes favorisent la substitution d'un geste mental à l'autre qui lui est équivalent. Ils joueront donc un rôle important dans la progression qui va être présentée.

Dans les problèmes A et C, on peut parler au contraire de *concordance entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*, au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est le même que celui qui conduit à un calcul économique.

Montrons que ces problèmes de type A ou C sont de bons candidats pour servir d'introduction au signe « : ».

L'enfant qui résout les problèmes A et C peut se représenter la situation décrite dans l'énoncé et déterminer la solution numérique avec le même geste mental : la quotition pour le problème A, la partition pour le C.

Supposons qu'un enseignant fasse résoudre l'un de ces problèmes à ses élèves, en leur annonçant qu'on appelle division le geste mental correspondant. Leur compréhension sera meilleure que s'ils avaient été confrontés au problème B ou D, où ce sont deux gestes mentaux différents qui permettent de se représenter la situation et de déterminer la solution numérique. Avec les énoncés B ou D, le message de l'enseignant aurait été plus ambigu.

Une question subsiste : faut-il choisir le problème A ou le problème C ? Quel doit être le sens premier du mot « diviser » : la quotition ou la partition ?

Quel geste mental enseigner en premier, ou encore quelle situation d'introduction de l'écriture $a : b$?

Comme nous l'avons remarqué au chapitre 1, avant que la division ne soit introduite en classe, la plupart des élèves de CE2 savent déjà qu'il existe une quatrième opération arithmétique qui s'appelle ainsi, et ils sont nombreux à savoir plus précisément que cette opération sert à résoudre des problèmes de partage (a partagé en b parts égales). C'est vraisemblablement ce qui explique que les problèmes de partage, quels que soient les choix didactiques des pédagogues, soient bien reconnus comme problèmes de division, qu'ils soient, en tout cas, mieux reconnus que les problèmes de quotition (en a combien de fois b ?).

Bien que cela puisse paraître paradoxal, cela nous a conduits à choisir un problème de groupement réitéré comme situation d'introduction de l'écriture $a : b$? au CM1.

En effet, l'année précédente, en CE2, l'introduction de la division était un événement. Lorsqu'on leur annonce qu'on va étudier la division, les élèves de ce niveau ne dissimulent généralement pas leur joie : enfin, ils vont apprendre cette quatrième opération ! Au CM1, la leçon où l'on revoit pour la première fois la division reste un événement : cette opération est la dernière rencontrée, celle qu'on maîtrise moins bien, elle garde un caractère de nouveauté.

Cette nouveauté crée une sorte de « prime à l'apprentissage » pour la situation qui est choisie comme situation d'introduction à un niveau donné. L'apprentissage, en effet, n'a pas seulement une dimension cognitive ; en cas d'engagement affectif fort, l'apprentissage est meilleur.

Comme il n'y a aucune crainte à avoir sur le fait qu'à terme les élèves reconnaîtront les problèmes de partage en tant que problèmes de division, il nous a semblé judicieux de réserver cette « prime à l'apprentissage » aux problèmes de quotition : s'ils servent comme situation d'introduction de la division, ils seront plus tard mieux reconnus comme étant des problèmes de division.

La situation choisie est donc un problème du type A. En fait, il s'agit d'un problème de géométrie : on sait qu'un segment mesure 171 mm et on se demande combien de fois la longueur d'un autre segment de 25 mm est contenue dans celle du premier (« En 171, combien de fois 25 ? »). La leçon correspondante inaugure la 2^e période du livre de l'élève au CM1, sq 36.

fois qu'on prend 25 objets dans la boîte, les élèves assis en reçoivent 1, et avec 213 objets, on peut en prélever 8 fois 25. Il reste alors 13 objets dans la boîte.

En revanche, tous les enfants qui auront trouvé la bonne solution numérique n'auront pas pris conscience qu'ils viennent de chercher « en 213, combien de fois 25 ? » et qu'ils viennent donc de faire la division correspondante (la réussite par l'action précède la prise de conscience des moyens utilisés). C'est le rôle du débat en classe de favoriser une telle prise de conscience.

La situation-problème précédente est décrite de façon plus détaillée dans ce guide pédagogique (sq 45) : c'est l'activité préliminaire à la situation-problème suivante, qu'on trouve p. 70 du livre de l'élève, et où un chef de brigands partage équitablement 318 pièces d'or entre ses 25 hommes.

Je découvre

1 Un chef de brigands a commencé à partager équitablement 318 pièces d'or entre ses 25 hommes. Quelle sera la part de chacun ? Restera-t-il des pièces ?



« J'ai déjà donné 1 pièce à chacun. En tout, je viens de distribuer 25 pièces... »

Écris la division qu'aurait pu faire le chef des brigands et calcule-la.

J'ai appris Quand je partage équitablement 318 objets entre 25 personnes, pour donner 1 objet à chaque personne, il faut 25 objets. Pour donner encore 1 objet à chaque personne, il faut encore 25 objets, etc. Pour partager équitablement 318 objets entre 25 personnes, je cherche combien de fois il y a 25 dans 318, je peux calculer la division $318 : 25$?

Apprendre à mettre en œuvre le geste mental de la partition

À ce moment de la progression, les enfants connaissent donc un premier geste mental permettant de calculer $a : b$?, celui où l'on cherche : en a combien de fois b ? Ils savent de plus que cette même division $a : b$? permet de résoudre des problèmes où l'on partage a objets en b parts égales.

Il leur reste à apprendre à mettre en œuvre le second grand geste mental pour le calcul d'une division, celui où l'on partage successivement des centaines, dizaines et unités, dans les cas où ce geste mental est le plus approprié, c'est-à-dire quand on divise par un nombre à un chiffre.

Le problème qui permet un tel apprentissage est évidemment le problème de type C (*On dispose de 587 objets et on les partage équitablement entre 3 personnes*). En effet, tant la sémantique de son énoncé que ses valeurs numériques incitent au partage.

Les élèves retrouvent donc (sq 47) le même chef de brigands qui, maintenant, doit partager 584 pièces d'or entre 3 de ses hommes. Comme le problème peut être résolu en donnant 1 pièce à chacun des 3 brigands, puis une autre, etc., le chef des brigands écrit la division $584 : 3$ (c'est ce qu'il a appris sq 45 !). Il se pose donc la question : en 584, combien de fois 3 ? Monsieur Cubus, qui est un personnage associé à l'usage

d'un matériel de numération classique⁵, lui rappelle qu'il est en train de faire un partage et qu'il serait plus économique de partager successivement les centaines, dizaines et unités.

Je découvre

584 : 3 ?
Le chef des brigands veut partager 584 pièces d'or en 3 parts égales.

« Je cherche : « En 584, combien de fois 3 ? ». Oh ! Ça va être long ! »

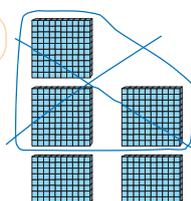


« Il ferait mieux de partager successivement les centaines, les dizaines et les unités. Regarde... »

a) Partage des centaines :

Monsieur Cubus a préparé 5 centaines, 8 dizaines et 4 unités. Il partage d'abord les centaines.

5 centaines divisées par 3, c'est 1 centaine et il reste 2 centaines.



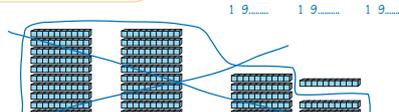
C D U C D U C D U

1 1 1

b) Partage des dizaines :

Monsieur Cubus a séparé les dizaines qui étaient dans les 2 centaines restantes. Il voit ainsi toutes les dizaines qu'il faut partager. Il effectue ce partage.

28 dizaines divisées par 3, c'est 9 dizaines et il reste 1 dizaine.



C D U C D U C D U

1 9 1 9 1 9

Le point crucial de cette procédure de partages successifs des centaines, dizaines et unités est évidemment le phénomène qui, dans la technique écrite, s'énoncera : « Et j'abaisse le chiffre des dizaines ». Dans le cas de $584 : 3$?, par exemple, après le partage des centaines, on dit : « Il en reste 2 et j'abaisse le 8 ». En effet, les dizaines à partager sont de deux sortes : les 20 qui proviennent des 2 centaines restantes et les 8 qui figuraient déjà dans le nombre de départ.

L'utilisation d'un matériel de numération comme celui de Monsieur Cubus facilite grandement la compréhension de ce phénomène : les enfants savent que les 2 plaques restantes correspondent à 20 barres qui s'ajoutent aux 8 « qu'on voyait déjà ».

De même, dans la technique écrite, on sera amené à dire : « Et j'abaisse le chiffre des unités ». En effet, les unités à partager sont de deux sortes : celles qui proviennent des dizaines restantes et celles qui figuraient déjà dans le nombre de départ. Avec le matériel de numération, quand il reste des barres, on extrait les 10 cubes qu'elles contiennent, qui s'ajoutent à ceux « qu'on voyait déjà ».

L'expérimentation en classe a montré que lorsque les enfants sont invités à calculer suffisamment de divisions de ce type ($912 : 4$?, $400 : 3$?, etc.) en *simulant par le dessin* le partage

5. Il s'agit d'un matériel formé de cubes-unités, de barres de 10 unités, de plaques contenant 10 barres (100 unités) et enfin des blocs contenant 10 plaques (1 000 unités).

successif des centaines, dizaines et unités (cf. l'activité ci-dessous, extraite du cahier d'activités CM1), le passage à la technique écrite ne pose ensuite aucun problème. Mais il serait aventureux de vouloir aller trop vite à cette technique écrite : 6 à 10 simulations par le dessin sont souvent nécessaires avant que les élèves aient construit le schéma du partage successif des centaines, dizaines et unités. Quand c'est le cas lors de l'introduction de la technique écrite, celle-ci est d'emblée pleinement signifiante.

912 : 4 ?

CDU CDU CDU CDU

Partage des centaines :

Partage des dizaines :

Partage des unités :

Expression du résultat :

q = ...
912 : 4 ? car
r =

Une technique où l'on partage successivement les centaines, dizaines, etc.

Pour effectuer des divisions par un nombre à 1 chiffre, les élèves disposent donc d'une technique où ils dessinent les éléments d'un matériel de numération. La transition vers une technique chiffrée selon la disposition classique « en potence » va s'effectuer facilement. Examinons d'abord cette transition, nous verrons ensuite que l'enjeu des séquences correspondantes est bien l'accès au calcul mental d'une division et non la seule appropriation d'une technique écrite, comme un examen superficiel pourrait le laisser croire.

Dans la technique chiffrée, les élèves commencent par disposer les nombres à l'intérieur de la « potence » et par estimer l'ordre de grandeur du quotient. Par exemple, pour $584 : 3$?, ils écrivent :

$$\begin{array}{r|l} \text{c d u} & \\ 584 & 3 \\ 2 & \\ \hline & \text{c d u} \\ & 1 \dots\dots \end{array}$$

Lorsqu'on partage 5 centaines entre 3 personnes, il est en effet possible d'en donner au moins 1 à chacune. Si la division avait été $287 : 3$?, en revanche, il aurait été impossible, avec seulement 2 centaines au départ, d'en donner 1 à chacune, et l'élève aurait dû écrire seulement « d u ».

Une autre particularité de cette technique est que les élèves barrent les chiffres à chaque fois que la division du nombre correspondant est achevée (c'est ce que les élèves faisaient lors de la simulation avec les plaques, barres et unités, et cela les aide à interpréter chaque étape de la technique). Ainsi, la division précédente se poursuit de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|l} \text{c d u} & \\ \cancel{5}84 & 3 \\ 2 & \\ \hline & \text{c d u} \\ & 1 \dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{c d u} & \\ \cancel{5}84 & 3 \\ 28 & \\ \hline & \text{c d u} \\ & 1 \dots\dots \end{array}$$

Le fait d'« abaisser le 8 » n'a rien de magique : après le partage des centaines, il en reste 2, c'est-à-dire 20 dizaines qui, avec les 8 de départ, font 28. Rapidement, il est évidemment plus court de dire « Et j'abaisse le 8 ».

Là encore, après le partage des 28 dizaines, 28 est barré et la technique s'achève ainsi :

$$\begin{array}{r|l} \text{c d u} & \\ \cancel{5}84 & 3 \\ \cancel{2}8 & \\ 1 & \\ \hline & \text{c d u} \\ & 19 \dots \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{c d u} & \\ \cancel{5}84 & 3 \\ \cancel{2}8 & \\ \cancel{1}4 & \\ 2 & \\ \hline & \text{c d u} \\ & 194 \end{array}$$

Finalement, le résultat est exprimé sous sa forme habituelle, la multiplication de 194 par 3 servant de preuve :

$$\begin{array}{l} q = 194 \\ 584 : 3 ? \quad \text{car } 584 = (3 \times 194) + 2 \\ r = 2 \end{array}$$

Expliquons enfin pourquoi, à ce moment de l'apprentissage, les élèves ne posent pas les soustractions successives ($5 - 2 = 3$; $28 - 27 = 1$, etc.). Dans des classes où nous avons incité les élèves à poser les soustractions, il devenait moins évident pour eux que cette technique n'est qu'une transcription chiffrée de celle qu'ils maîtrisaient déjà avec le matériel de Monsieur Cubus. Nous avons donc renoncé, à ce moment de la progression, à leur demander de le faire.

Plus tard, en revanche, lors de l'apprentissage de la technique générale (pour calculer $8956 : 37$?, par exemple), nous verrons que les élèves ont la possibilité de poser les soustractions à l'intérieur de la « potence » et qu'ils le font volontiers.

Une technique écrite au service du calcul mental

L'apprentissage de la division par un nombre à 1 chiffre est-il seulement une étape vers l'appropriation de la technique écrite de la division ?

Il est vrai que c'est cette technique qui, plus tard dans l'année, est généralisée au cas de la division par un nombre à plusieurs chiffres. Mais de notre point de vue, le résultat le plus important que nous ayons obtenu avec les élèves qui ont testé une première version de la progression est leur progrès en calcul réfléchi d'une division.

Lorsqu'ils étaient confrontés à une suite de divisions, certaines par 10, 25, 50, 100, d'autres par un nombre à 1 chiffre, ils

adoptaient le geste mental approprié, s'abstenant toujours de poser les premières pour encadrer le dividende par des multiples du diviseur (geste mental de la quotition).

Il est important de remarquer que certains élèves s'abstenaient aussi de poser les divisions d'un grand nombre par 2, 3, 4 ou 5 parce qu'ils étaient capables de procéder directement aux partages successifs des centaines, dizaines et unités, écrivant le quotient au fil de la plume et retenant les restes partiels soit mentalement soit sur leurs doigts. Quelle que soit la division simple demandée, ceux-là faisaient donc bien évidemment du calcul mental et réfléchi.

Mais, même concernant ceux qui avaient encore besoin de poser les divisions par un nombre à 1 chiffre en utilisant la « potence », on peut dire qu'ils maîtrisaient les deux grands gestes mentaux du calcul d'une division et qu'ils adaptaient leur geste mental aux particularités du calcul qui leur était demandé : ils faisaient aussi du « calcul réfléchi ».

De notre point de vue, c'est au moins aussi important que de maîtriser la technique écrite. Le lecteur qui penserait que la technique rapportée ci-dessus constitue une étape importante de la progression parce qu'on va en généraliser l'usage aux divisions par un nombre à plusieurs chiffres, et seulement pour cette raison, se tromperait gravement. C'est effectivement une étape importante de la progression. Mais la raison principale en est que cette technique permet aux élèves de mettre en œuvre le geste mental de la partition alors qu'ils possèdent déjà celui de la quotition. Dorénavant, ils peuvent choisir le geste mental approprié au calcul demandé.

En grande partie, c'est dans les PAC que les enfants construisent leurs compétences

Le lecteur qui penserait que la technique écrite rapportée plus haut constitue le but ultime de la progression se tromperait pour une autre raison : dans la progression présentée, c'est la résolution de problèmes qui, en fait, constitue le but ultime de l'enseignement du calcul mental d'une division.

Du coup, c'est dans les PAC que le pédagogue a la possibilité de repérer le progrès qui est vraisemblablement le plus important. C'est le moment où un élève reconnaît un problème du type D (*on dispose de 587 objets et on fait des groupes de 3*) en tant que problème de division. Alors que l'énoncé parle d'un groupement, l'élève met en œuvre une stratégie de partages successifs des centaines, dizaines et unités. Il s'approprie à titre personnel l'équivalence des deux gestes mentaux de la division. Le lecteur aura reconnu dans les problèmes de ce type ceux dont nous avons dit au chapitre 2 qu'ils suscitent et révèlent le progrès chez les élèves. Ils suscitent le progrès parce que les valeurs numériques retenues créent un conflit entre l'économie de la représentation (le geste économique est celui de la quotition) et l'économie du calcul (le geste économique est celui de la partition). Quand un enfant, en acte, passe du geste mental de la quotition à celui de la partition, il est judicieux de l'amener à réfléchir le progrès qu'il vient de réaliser. Un exemple de dialogue pédagogique que le maître peut avoir avec un tel enfant a été décrit au chapitre précédent.

La technique écrite de la division par un nombre à plusieurs chiffres

Une première question se pose : à notre époque, est-il toujours utile d'enseigner cette technique ? Il existe en effet de sérieux arguments en faveur de l'abandon de son enseignement. Et d'abord, le fait qu'il est bien rare qu'un adulte soit amené à poser une division à la main. Dans la vie courante, seuls le calcul mental et le calcul avec une machine ont cours. Par ailleurs, dans certaines progressions, les élèves doivent s'approprier une technique permettant d'effectuer les divisions les plus générales ($9\ 837 : 23 ?$, par exemple), alors qu'ils ne maîtrisent pas encore les cas plus simples : division par un nombre à 1 chiffre ($9\ 837 : 4 ?$, par exemple) ou division avec 1 chiffre au quotient ($137 : 23 ?$, par exemple). Leur tâche est rude. Le temps qu'il faut consacrer à un tel apprentissage est important. La réussite est faible : lors de l'évaluation menée à l'entrée en 6^e de 1994, la division $4\ 584 : 8$ ne conduit qu'à 64 % de réussite !

Certains en concluent : arrêtons de consacrer beaucoup de temps à un apprentissage qui fonctionne mal et qui ne sert à rien !

Un tel point de vue repose selon nous sur une conception erronée de l'apprentissage. Est-il envisageable que les élèves, de manière généralisée, aient conceptualisé la division euclidienne, qu'ils sachent l'utiliser à bon escient tout en étant dépendants d'une calculette pour en effectuer le calcul numérique ? Le penser, c'est concevoir la conceptualisation et le calcul comme indépendants l'un de l'autre. Nous avons fermement pris position contre une telle conception. La conceptualisation de la division euclidienne est dépendante des savoir-faire en calcul mental d'une division. Or, quand l'enfant a développé de bonnes compétences en calcul mental dans des cas simples ($9\ 837 : 4 ?$ ou $137 : 23 ?$, par exemple), l'accès à une technique générale (pour résoudre $9\ 837 : 23 ?$, par exemple) ne nécessite plus qu'on y consacre beaucoup de temps ; mais surtout, comme nous allons le voir, c'est une nouvelle occasion de mettre en relation les deux grands gestes mentaux de la division euclidienne, la partition et la quotition.

La technique écrite au service de la coordination des deux gestes mentaux de la division

Analysons la tâche consistant à poser et à calculer une division telle que $23\ 695 : 38 ?$ en généralisant la technique de la division par un nombre à un chiffre.

$$\begin{array}{r}
 \text{c} \quad \text{d} \quad \text{u} \\
 \hline
 2\ 3\ 6\ 9\ 5 \quad | \quad 3\ 8 \\
 \hline
 \text{c} \quad \text{d} \quad \text{u} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

On commence par s'imaginer un scénario de partage successif des milliers, centaines, etc. On ne peut pas donner de milliers à chacune des 38 personnes (il n'y a que 23 milliers). Le premier groupement qu'il est donc possible de partager est celui des centaines parce qu'on en a 236. Combien font « 236 divisé par 38 ? ». Remarquons immédiatement que le simple fait de formuler ainsi ce calcul partiel conduit à un changement de geste mental, parce que « 236 divisé par 38 ? » se calcule avec le geste de la quotition (en 236, combien de fois 38 ?).

C'est un scénario de partages successifs qui organise globalement l'algorithme, mais pour chaque calcul partiel l'économie est du côté de la quotition.

D'où l'expression que les pédagogues d'avant 1980 adoptaient et dont nous recommandons encore aujourd'hui l'usage : « 236 divisé par 38, ou encore, en 236 combien de fois 38 ? ». Cette expression favorise la transition du geste mental de la partition vers celui de la quotition.

La technique de la division par un nombre de plusieurs chiffres n'est donc pas une simple généralisation de celle de la division par un nombre à 1 chiffre. Alors que la technique écrite de la division par un nombre à 1 chiffre exige seulement le geste mental de la partition, celle de la division par un nombre à plusieurs chiffres exige d'utiliser de façon coordonnée les deux gestes mentaux de la partition et de la quotition. Parce qu'elle utilise l'équivalence de ces deux gestes mentaux, son apprentissage est aussi une nouvelle occasion de s'approprier cette équivalence. C'est certainement le principal intérêt pédagogique de l'apprentissage d'une telle technique.

La technique écrite que nous avons choisi d'enseigner exige donc d'utiliser de façon coordonnée les deux gestes mentaux de la division. La réussite d'un tel enseignement dépend :

- 1°) de la maîtrise de chacun des gestes mentaux ;
- 2°) de l'apprentissage de leur coordination.

Concernant le premier point, nous avons vu que les enfants maîtrisent assez rapidement le geste mental de la quotition quand on divise par 10, 25, 50, 100, 250, etc. Mais qu'en est-il concernant des divisions du type $236 : 38$?

Les divisions du type $236 : 38$?

La complexité du comportement expert

Pour ce type de division, la stratégie mentale est la même que s'il s'agissait de $236 : 25$ (geste mental de la quotition). Cependant, avec 38 comme diviseur, les multiples ne sont plus connus par cœur. Pour déterminer le quotient, un expert fait du calcul approché. Pour $236 : 38$, par exemple, 38 est proche de 40. Le quotient de $236 : 38$ est proche de celui de $236 : 40$.

On sait qu'après cette approximation, le calcul peut être systématisé en disant « En 236 combien de fois 40, ou encore en 23 combien de fois 4 ? » parce que le quotient de 236 par 40 est le même que celui de 23 par 4, c'est-à-dire 5 (plus généralement, le quotient de 258 par 70 est le même que celui de 25 par 7, celui de 482 par 90 le même que celui de 48 par 9, etc.).

Cependant, du fait de l'approximation de départ, rien n'assure que 5 soit effectivement le quotient cherché. Dans $236 : 38$, on a remplacé 38 par 40, on a donc divisé par un nombre plus grand, ce qui a pu avoir pour effet de minorer le quotient. Les élèves doivent donc rester vigilants : peut-être le quotient n'est-il pas 5, mais 6 ; c'est la valeur de $236 - (38 \times 5)$ qui permettra de le décider. Ce calcul conduit à 46, qui est plus grand que 38 ; le quotient recherché est donc effectivement 6. Le comportement d'un élève qui raisonne ainsi repose sur de nombreuses connaissances : la propriété selon laquelle le quotient de 236 par 40 est le même que celui de 23 par 4, le fait que remplacer 38 par 40 au diviseur conduit à minorer le quotient alors que le remplacement de 32 par 30 le majorerait, etc. Faut-il expliciter d'emblée toutes ces connaissances pour que l'enfant apprenne à déterminer le quotient de telles divisions ? On court le risque que les élèves ne construisent jamais les habiletés nécessaires parce qu'elles leur semblent inaccessibles : il faut se rappeler trop de choses pour les mettre toutes en œuvre ! Un tel enseignement explicite est vraisemblablement prématuré au CM1 ; il est plus opportun au CM2.

Tables de multiples ou non ?

Lorsqu'on décide de ne pas enseigner explicitement les connaissances précédentes, les enfants peuvent quand même trouver le quotient d'un nombre de 2 chiffres par un nombre à 1 chiffre en utilisant l'une des deux stratégies suivantes :

- 1°) La construction systématique d'une table des multiples du diviseur.

- 2°) La détermination du quotient par tâtonnement, en ne calculant que partiellement les multiples du diviseur. Quand on a essayé un multiple et qu'il est plus grand que le dividende, on en cherche un plus petit. Quand un autre est plus petit, on cherche si un plus grand conviendrait également. Dans tous les cas, l'estimation de la différence entre le multiple calculé et le dividende guide la recherche.

L'aspect systématique de la première stratégie rassurerait un grand nombre d'élèves, mais il les piègerait aussi : certains auraient beaucoup de mal à renoncer à construire la table pour entrer dans du calcul approché. Il n'est jamais simple d'abandonner une procédure longue mais fiable pour une autre plus aventureuse et qui, dans un premier temps au moins, n'est pas toujours plus économique.

C'est pourquoi nous avons choisi de favoriser d'emblée la deuxième stratégie. Celle-ci a le mérite d'engager l'enfant dans une attitude de calcul approché. L'élève qui, pour déterminer le quotient de $216 : 38$?, ne calcule pas 38×2 mais commence directement à 38×3 n'est pas entré dans un calcul systématique, il a déjà fait un pas important vers le calcul approché. Dès le début (sq 41), on incite donc les enfants à ne pas construire la totalité de la table. En outre, nous avons choisi le plus souvent, au CM1, de ne proposer que des divisions dont le quotient est inférieur ou égal à 5.

Pourquoi se limiter le plus souvent à des quotients ≤ 5 ?

Lorsque le domaine numérique à explorer est trop vaste, pour de nombreux élèves la procédure qui consiste à construire la

table des multiples est longtemps plus économique. En se restreignant aux premiers multiples, les nombres en jeu sont plus petits. Du coup, les enfants utilisent plus volontiers le calcul mental et ils construisent ainsi des stratégies de calcul approché *par l'usage* et non parce qu'ils appliquent des règles enseignées. Il est évidemment recommandé d'expliciter en classe les découvertes des enfants, mais aucune règle qu'ils ne se soient eux-mêmes donnée ne dicte leur comportement, sinon celle d'adopter *l'attitude* du calcul approché.

Quels choix pour apprendre à coordonner les deux gestes mentaux au sein de la technique ?

Rappelons qu'à un niveau général, la technique écrite que nous avons retenue pour le calcul de $23\ 695 : 38 ?$ est structurée par le geste mental de la partition, alors que les calculs partiels tels que celui de $236 : 38 ?$ reposent sur le geste de la quotition. Pour favoriser l'usage coordonné de ces deux gestes mentaux, nous avons choisi de :

- 1°) Mettre à nouveau en relation, lors de la séquence d'introduction (sq 79), les actions successives de partage des centaines, dizaines et unités du matériel de numération « Base 10 », déjà décrit, avec le déroulement de la technique chiffrée.
- 2°) Se placer à nouveau, lors de cette leçon d'introduction (sq 79), dans le cas de divisions par 25 (l'exemple d'introduction est $1\ 443 : 25 ?$). En l'absence de difficultés de calcul des multiples de 25, les enfants peuvent en effet consacrer toute leur attention à la compréhension des raisons qui fondent l'organisation générale du calcul.
- 3°) S'arranger pour que les retraits de multiples de 25 ($144 - 125$, par exemple, quand on commence la division $1\ 443 : 25$) présentent des difficultés de calcul dues à des retenues. Cela justifie le fait qu'on pose alors les soustractions à l'intérieur même de la « potence », ce qui facilite les calculs partiels.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \text{d} \quad \text{u} \\
 \hline
 1\ 4\ 4\ 3 \\
 - 1\ 2\ 5 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 2\ 5 \\
 \hline
 \text{d} \text{ u} \\
 5 \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Un peu plus tard, les enfants procèdent de même, mais avec des exemples du type $23\ 695 : 38 ?$ (sq 85).

Conclusion : une comparaison avec les progressions antérieures

Comparaison avec la progression « traditionnelle », celle qui prévalait avant 1980

La progression présentée ici est très différente de la progression traditionnelle, celle qui prévalait avant qu'une équipe de l'INRP, Ermel, n'ait diffusé, vers 1980, ce que les formateurs de maîtres ont souvent appelé la « nouvelle division ». Avant 1980, les enfants apprenaient d'abord la division par 2, puis par 5, par 3, 4, 6, etc. En revanche, ici, le signe « : » est introduit avec une division par 25 !

Remarquons cependant que, dans *J'apprends les maths*, certaines séquences rappellent des leçons classiques de l'époque. Ainsi, lorsqu'il s'agissait d'introduire la division d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre à 1 chiffre, le scénario privilégié pour enseigner la division $584 : 3 ?$, par exemple, était souvent un partage de monnaie. On doit partager équitablement 584 €, c'est-à-dire 5 billets de 100 €, 8 billets de 10 € et 4 pièces de 1 €, entre 3 personnes :

– Partage des centaines : chaque personne aura 1 billet de 100 € et il reste 2 billets de 100 €.

– Partage des dizaines : les 2 billets de 100 € sont changés en billets de 10 €, ce qui fait 20 billets de 10 €. Avec les 8 billets qu'on avait à l'origine, cela fait 28 billets de 10 € à partager, etc. Cependant, même au niveau de la technique opératoire qui est finalement retenue, il existe des différences sensibles : on ne déterminait pas à l'époque l'ordre de grandeur du résultat avant de s'engager dans le calcul, par exemple.

Mais surtout, l'esprit général des deux progressions est complètement différent : la préoccupation majeure, à l'époque, était d'amener progressivement les enfants à maîtriser l'algorithme écrit ; à leur charge de « réinvestir » cette connaissance en résolution de problèmes (l'attitude qui prévalait concernant l'articulation entre le calcul et la résolution de problème était celle que nous avons qualifiée de « traditionnelle »).

Ce n'est pas un hasard si, dans la progression traditionnelle, les enfants commençaient par les divisions par 2, 3, etc., alors qu'ici ils commencent par des divisions par 10, 25, 50, etc. Les deux progressions reposent sur des conceptions théoriques qui n'accordent pas le même rôle au calcul mental dans le progrès en résolution de problèmes.

Comparaison avec la progression qui a prévalu entre 1980 et 2015

Entre 1980 et 2015, date des nouveaux programmes pour l'école élémentaire, c'est le plus souvent en mettant en œuvre des « divisions-quotition » (en a combien de fois b ?) que les enfants apprennent le calcul écrit d'une division. Pour calculer $584 : 3$, on se pose ainsi successivement les questions :

- dans 584, combien de centaines de fois 3 ?
- dans les 284 unités restantes, combien de dizaines de fois 3 ? etc.

Les innovateurs de 1980 pensaient que les enfants pouvaient plus facilement « construire » cette technique que la traditionnelle.

On peut considérer aujourd'hui que cette innovation n'a pas eu les effets attendus. En 1977 (date à laquelle la majorité des enseignants utilisaient encore l'ancienne technique), la division $8\ 359 : 39$ conduisait à 69 % de réussite en fin de CM2 (enquête INRP). Or, nous avons vu que lors de l'évaluation menée à l'entrée en 6^e en 1994, la division $4\ 584 : 8$ qui, *a priori*, est plus simple, ne conduisait qu'à 64 % de réussite. Les enfants n'ont pas progressé dans le calcul d'une division. Une enquête postérieure, publiée en 2008, menée par un département ministériel (la Depp) a même montré que ces performances avaient régressé entre 1987 et 1999. Comment l'expliquer ?

La technique de la « nouvelle division » (elle était nouvelle vers 1980), basée sur la « division-quotition », est plutôt plus complexe que celle où l'on partage successivement les centaines, dizaines et unités. Les enseignants consacrent beaucoup de temps à ce que les enfants « construisent » cette technique, mais dans les faits cette « construction » s'avère longue et pénible, et de nombreux enfants apprennent tout aussi difficilement qu'avant 1980 non pas une, mais plusieurs techniques successives : celle où l'on utilise la table des multiples du diviseur, celle où l'on n'écrit plus les zéros, etc. Notre choix concernant la technique de la division est évidemment très différent de celui des innovateurs de 1980. Mais, au-delà de ces différences dans la technique écrite, c'est, là encore, l'esprit général des deux progressions qui n'est pas le même : alors que les pédagogues d'avant 1980 privilégiaient la « division-partition », les innovateurs d'après 1980 ont souvent privilégié la « division-quotition ».

Dans *J'apprends les maths*, comme dans les nouveaux programmes publiés en 2015, il est recommandé de ne privilé-

gier ni la division-partition, ni la division-quotition parce que c'est la construction de l'équivalence entre ces deux gestes mentaux qui permet des progrès décisifs en résolution de problèmes.

En résumé, dans la progression présentée ici, l'accent est mis sur le calcul mental d'une division parce qu'il est considéré comme essentiel pour la conceptualisation de la division, c'est-à-dire pour la résolution des problèmes de division.

Les deux grandes nouveautés de cette progression sont : 1°) l'enseignement de l'équivalence des deux grands gestes mentaux du calcul mental d'une division ;

2°) s'agissant des problèmes « difficiles » de division (ceux de quotition, essentiellement), la gestion différenciée de l'accès au 3^e niveau de résolution de ces problèmes dans le contexte des PAC.

Une notion théorique a joué un rôle crucial dans l'élaboration de cette progression : celle de conflit entre l'économie de la représentation d'un problème et l'économie du calcul qui conduit à sa solution numérique.

Chapitre 4

Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche

Les principales idées qui ont présidé à l'élaboration de la progression sur les fractions et les décimaux de *J'apprends les maths CM1* ont été présentées lors du 25^e Colloque des formateurs et des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, organisé par la Copirelem (Commission permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire), à Loctudy (Finistère), du 11 au 13 mai 1998. Le texte qui suit est celui qui a été rédigé pour les actes de ce colloque.

PLAN DU CHAPITRE

- C'est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux.
- Qu'est-ce qu'un décimal ?
 - S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre « irrationnel ».
 - S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre « rationnel ».
 - Un projet présent dès l'invention des fractions
 - Le concept de fraction a beaucoup évolué depuis son invention.
 - Ce que nous a appris ce « détour épistémologique ».
- Les décimaux écrits avec une virgule : ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers.
- Un premier choix fondamental : enseigner d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales.
- Une équivalence fondamentale pour conceptualiser les fractions : partition de la pluralité et fractionnement de l'unité.
- Un deuxième choix fondamental : donner d'abord du sens à a/b dans un contexte de partition de la pluralité.
 - Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture $11/4$ comme « 11 quarts ».
 - Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture $11/4$ comme « 11 divisé par 4 » dans un contexte de partition de la pluralité.
 - Commencer par le sens le moins « naturel » ?
- La notion de conflit entre l'économie de la représentation et celle du calcul pour enseigner l'équivalence qui fonde le concept de fraction.
 - Première étape : a/b est défini comme « a divisé par b ».
 - Deuxième étape : « 3 partagé en 4 », c'est « 3 quarts ».
 - Troisième étape : équivalences d'écritures et comparaison de fractions.
 - Quatrième étape : « 155 tiers », c'est aussi « 155 divisé par 3 ».
- Les autres choix fondamentaux et la fin de la progression.
 - Ne pas introduire d'emblée l'addition des fractions.
 - Utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement.
 - Enseigner l'écriture à virgule comme un simple changement de notation.
 - Faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.
- Conclusion.
 - Une comparaison avec les deux progressions de référence, celles de R. Douady et de G. Brousseau.
 - Quels résultats dans les classes expérimentales ?

C'est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux

Le temps que nous avons choisi de consacrer à l'apprentissage des fractions et des décimaux au CM1 est relativement important. Aussi convient-il tout d'abord de justifier un tel choix, en montrant que ce niveau de scolarité est vraisemblablement crucial pour l'appropriation de ces notions.

Les élèves comprennent mal les décimaux, ce qui les conduit à des erreurs systématiques qui, pour la plupart, sont bien connues des maîtres. Lors de l'évaluation d'entrée en 6^e de 1993, par exemple, on demandait quel est le plus grand de ces deux nombres : « 6 987 et 6 879 ». Avec ces entiers, 87 % des élèves ont réussi. La même question avec les décimaux « 1,015 et 1,05 » n'a conduit qu'à 52 % de réussite. Un tiers des élèves ont écrit que 1,015 est plus grand que 1,05. Vraisemblablement parce qu'ils ont comparé 15 et 5 sans se préoccuper que 15 désigne des millièmes alors que 5 désigne des centièmes.

Et lors de l'évaluation de 1997, il n'y a que 49 % des élèves qui réussissent la division $67 : 100$ posée en ligne. Pour un adulte cultivé, cet exercice est très facile car diviser par 100, c'est prendre le centième. On a donc $67 : 100 = 67/100 = 0,67$. Il faut croire qu'un tel raisonnement est beaucoup plus difficile qu'il ne paraît.

On ne peut même pas se rassurer en remarquant qu'un taux de réussite d'environ 50 % dans chacune de ces épreuves est loin d'être négligeable, car rien n'assure que les élèves qui réussissent ont bien compris les décimaux.

Concernant le premier exercice, on sait en effet que de nombreux maîtres enseignent la règle : « Pour comparer deux décimaux, on écrit des zéros à droite de la virgule jusqu'à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule ». Un élève qui applique cette règle est conduit à comparer 1,015 et 1,050 et là, il ne se trompe plus parce que $15 < 50$. A-t-il pour autant mieux compris ce que sont des centièmes par rapport à des millièmes ? Rien n'est moins sûr.

La division par cent possède, elle aussi, sa règle : « Pour diviser un nombre par cent, je décale la virgule de 2 rangs vers la gauche ». Il est vraisemblable que certains élèves réussissent en utilisant cette règle sans beaucoup de connaissances concernant les décimaux.

Enseigner de telles règles est même très probablement un « piège pédagogique » parce qu'en les appliquant, certains élèves réussissent diverses tâches portant sur des décimaux alors qu'ils n'ont fondamentalement pas compris ce qu'est un décimal.

Une telle analyse est-elle purement spéculative ?

Des résultats rapportés récemment par J. Bolon¹ nous incitent à penser que non. Elle a proposé la tâche suivante à des élèves depuis la fin du CM1 jusqu'à la 5^e.

Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche :

6,9 ou 7,08 ?

Le tableau suivant donne les pourcentages de réussite :

Classe	CM1	CM2	6 ^e	5 ^e
Réussite	22 %	30 %	27 %	29 %

Comment un expert effectue-t-il cette tâche ? Il calcule d'abord deux écarts : celui entre 6,9 et 7 est de 1 dixième, alors que celui entre 7 et 7,08 est de 8 centièmes. Comme 8 centièmes est plus petit que 1 dixième, c'est 7,08 le plus proche de 7. La solution est donc assez immédiate pour celui qui a bien conceptualisé les décimaux.

En revanche, l'élève qui doit calculer deux soustractions $7 - 6,9$ et $7,08 - 7$ (c'est-à-dire, en appliquant la fameuse règle : « $7,0 - 6,9$ » et « $7,08 - 7,00$ ») puis comparer les résultats 0,1 et 0,08 (c'est-à-dire, en appliquant la règle 0,10 et 0,08) a peu de chance de réussir.

Comment expliquer l'erreur persistante selon laquelle 6,9 serait le nombre le plus proche de 7 ? Là encore, les enfants travaillent vraisemblablement sur l'écriture des nombres indépendamment de ce qu'ils représentent. Ils savent que pour passer de l'écriture « 6,9 » à l'écriture « 7,0 », il faut « ajouter un 1 », alors que pour passer de « 7 » à « 7,08 », il faut « ajouter un 8 ». L'écart est plus grand quand on ajoute 8 que quand on ajoute 1 ! L'erreur observée résulte bien, là encore, d'un défaut de conceptualisation, les élèves raisonnant avec ces nouveaux nombres en appliquant des règles qui ne valent que pour les entiers.

Les résultats obtenus par J. Bolon conduisent à penser que : 1°) Un petit quart des élèves ont déjà une bonne conceptualisation des décimaux dès la fin du CM1 (cf. le pourcentage de réussite observé).

2°) En revanche, ceux qui n'ont pas compris les décimaux à ce moment ne les comprendront vraisemblablement pas beaucoup mieux dans les quelques années qui suivent (le pourcentage de réussite n'évolue guère durant les trois années suivantes).

L'enjeu des pratiques pédagogiques des maîtres de CM1 concernant les décimaux est donc crucial ! Avant d'envisager une manière de surmonter les difficultés que les élèves rencontrent, il importe de se demander quelle en est l'origine. Celle-ci est d'abord à chercher dans la nature même des décimaux, très différente de celle des entiers : ce sont des fractions qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue quelconque.

1. Bolon J., *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*, thèse de sciences de l'éducation, université Paris-5 - Sorbonne, 1996.

Qu'est-ce qu'un décimal ?

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre « irrationnel »

Considérons ce problème classique : combien la diagonale d'un carré (d) mesure-t-elle quand on prend le côté du carré (c) comme unité de longueur ? On voit immédiatement que la diagonale contient une fois le côté mais pas deux fois. Cette mesure, comprise entre 1 et 2, n'est donc pas un nombre entier. Considérons une petite longueur égale à $c/10$. Il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 14 fois sur d , mais pas 15 fois. On a donc :

$$14/10 c < d < 15/10 c \text{ ou encore : } 1,4 c < d < 1,5 c$$

Et en considérant une longueur encore plus petite, égale à $c/100$, il serait assez facile de montrer qu'on peut la reporter 141 fois sur d , mais pas 142 fois. On a donc :

$$141/100 c < d < 142/100 c \text{ ou encore : } 1,41 c < d < 1,42 c$$

Il importe de remarquer qu'à l'étape précédente, on avait placé d entre deux nombres ($14/10 c$ et $15/10 c$) dont l'écart est $c/10$ et qu'on vient de le placer entre deux nombres ($141/100 c$ et $142/100 c$) dont l'écart est 10 fois plus petit : $c/100$.

En continuant de la sorte, on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de la mesure de la diagonale du carré. On n'exprimera jamais une mesure exacte de cette longueur : on sait en effet que le nombre (C2) dont on s'approche ainsi est dit *irrationnel*, ce qui signifie qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction p/q . En revanche, on s'en approche d'aussi près que l'on veut par le développement décimal que nous venons d'amorcer : $14/10$, $141/100$, $1\ 414/1\ 000$, $14\ 142/10\ 000$, etc. C'est pour cela que le système des nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) a été inventé : ce système de fractions permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de n'importe quelle grandeur continue. Les mathématiciens parlent du « filtre décimal ». Il s'agit d'un filtre particulièrement intéressant parce qu'on peut régler à volonté la « taille des trous ».

S'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre « rationnel »

Rappelons d'abord que les nombres rationnels sont ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fractions. À l'école élémentaire, c'est essentiellement en essayant d'approcher la valeur d'un rationnel que les enfants vont prendre conscience de l'intérêt des nombres décimaux. Considérons par exemple ce problème : « Lorsqu'elles sont empilées, 7 feuilles de carton identiques forment une épaisseur totale de 10 mm. Quelle est l'épaisseur de l'une d'elles ? »

Il s'agit donc de partager équitablement l'épaisseur totale de 10 mm entre les 7 feuilles identiques. Chaque feuille a une épaisseur légèrement supérieure à 1 mm. L'opération qui permet d'obtenir le résultat est une division-partition, mais une division différente de la division euclidienne parce que le reste (3 mm) doit lui aussi être partagé entre les 7 feuilles (il s'agit donc d'une « division où l'on partage le reste »).

Le lecteur sait que, dans ce cas-là, on peut « pousser la division après la virgule », ce qui permet d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de l'épaisseur d'une feuille, grâce à une suite décimale : 1,42857 mm, par exemple.

En revanche, les adultes cultivés ne savent pas toujours qu'il est possible d'exprimer exactement cette mesure en utilisant un rationnel : 10 divisé par 7 est très exactement égal à $1 + 3/7$. Cette égalité s'obtient facilement à partir de celle de la division euclidienne : quand on divise 10 par 7, le quotient est 1 et il reste 3. Or ces 3 mm qui restent doivent eux aussi être répartis entre les 7 feuilles, ce qui donne « 3 divisé par 7 » ou $3/7$ (cette conjonction « ou » exprime une équivalence qui sera minutieusement analysée plus loin).

Alors que le résultat de la division de 10 par 7 s'exprime exactement sous la forme $1 + 3/7$, comment se fait-il que la plupart du temps, on privilégie une approximation décimale de ce nombre, à savoir 1,4285... ? Formulons différemment cette question : on comprend aisément l'utilisation du « filtre décimal » dans le cas des irrationnels parce que ces nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions. Mais pourquoi l'utilise-t-on également dans le cas des rationnels ? Parce qu'il est plus facile de comparer, de faire des approximations et de calculer avec des développements décimaux qu'avec des expressions exactes qui utilisent les fractions.

Pour comparer $4/7$ et $3/5$ à partir de leur écriture fractionnaire, par exemple, il faut les « réduire au même dénominateur ». On obtient $4/7 = 20/35$ et $3/5 = 21/35$, ce qui permet de conclure. Le problème de comparaison est résolu, mais on ne sait guère « ce que vaut » chacune des fractions. En revanche, dès le second chiffre après la virgule, on voit que $4/7 = 0,57...$ alors que $3/5 = 0,6$. Dès ce moment, on peut non seulement conclure que $4/7$ est plus petit que $3/5$ mais, de plus, on situe chacune des fractions par rapport à $1/2$ et $3/4$, on a une bonne approximation de leur écart, etc.

De même, lorsqu'il s'agit d'additionner, soustraire, etc., il est le plus souvent extrêmement commode d'opérer sur des valeurs approchées décimales, parce que les calculs ressemblent à ceux qu'on effectue sur les entiers.

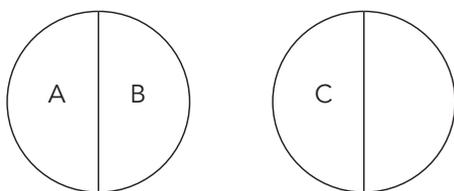
Un projet présent dès l'invention des fractions

Les nombres décimaux sont une invention récente (vers la Renaissance). En revanche, le projet auquel ils répondent (approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue) est très ancien et remonte au moins à l'Égypte antique, c'est-à-dire à l'invention des fractions unitaires. D'une façon générale, les seules fractions que les Égyptiens utilisaient à cette époque étaient les fractions de numérateur 1 (c'est pour cela qu'on les appelle « unitaires ») : $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, etc. En fait, dans de nombreux contextes (mesures de contenances de céréales, d'agrumes ou de liquides), l'ensemble des fractions utilisées était encore plus restreint puisqu'il se réduisait à celles dont le dénominateur est une puissance de 2 : $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$ et $1/64$.

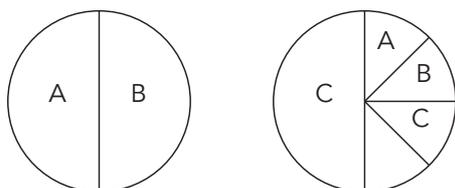
Or, un tel système de fractions, lorsqu'on le prolonge, fonctionne comme un filtre analogue au filtre décimal. Montrons,

par exemple, qu'il permet d'approcher d'aussi près que l'on veut le résultat du partage de 2 galettes entre 3 personnes A, B et C.

On commence par donner $1/2$ galette à chacune des 3 personnes. Comme $2 = (1/2 + 1/2 + 1/2) + 1/2$, il reste encore $1/2$ galette à partager.



On peut alors songer à distribuer des parts deux fois plus petites, correspondant donc à $1/4$ de galette. Cependant, dans la $1/2$ galette restante, on ne dispose pas de trois parts de $1/4$ de galette. En revanche, avec des parts deux fois plus petites encore ($1/8$ de galette), on peut en distribuer une à chacune des 3 personnes. Comme $1/2 = (1/8 + 1/8 + 1/8) + 1/8$, chaque personne possède alors $1/2 + 1/8$ de galette et il reste encore $1/8$ de galette à partager.



Le même raisonnement peut être poursuivi, montrant qu'en distribuant $1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + \dots$ de galette à chaque personne (en « sautant » un dénominateur possible sur deux), on s'approche de plus en plus de la valeur cherchée. On vient de montrer qu'en utilisant le filtre de fractions unitaires $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$, on peut approcher la fraction $2/3$, qui n'est pas unitaire, d'aussi près que l'on veut. D'un point de vue théorique, ces fractions unitaires et les décimaux ont la même fonction.

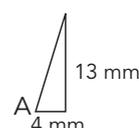
Le concept de fraction a beaucoup évolué depuis son invention

Les fractions unitaires des Égyptiens antiques sont très simples à comprendre. En revanche, la notion de rationnel est devenue aujourd'hui extrêmement complexe parce qu'un même nombre rationnel permet de rendre compte d'opérations mentales très diverses. En fait, les chercheurs en didactique des mathématiques font des analyses différentes des divers sens d'un rationnel².

Avançons une analyse possible en considérant par exemple la fraction $13/4$ et en distinguant les sortes de grandeurs que 13 et 4 sont susceptibles de représenter³.

1°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de nature différente, et alors $13/4$ se lit le plus souvent « 13 pour 4 ». Dans ce cas, la fraction désigne ce qu'on appelle habituellement une *proportion* (13 cas de maladie pour 4 milliers d'habitants, par exemple), proportion qui permet souvent de définir ce qu'on appelle une « grandeur-quotient » : une vitesse (13 kilomètres en 4 heures), un rendement (13 hectolitres d'alcool pour 4 tonnes de raisin), etc.

2°) Soit les nombres 13 et 4 renvoient à des grandeurs de même nature, et la fraction $13/4$ désigne alors un *rapport*. Dans le triangle ci-dessous, par exemple, le rapport $13 \text{ mm} / 4 \text{ mm}$ est un rapport trigonométrique (la tangente de l'angle A).



Dans ce cas, $13/4$ se lit souvent « 13 divisé par 4 ». Cette fraction renvoie à une « division-quotition » : « En 13 mm, combien de fois 4 mm ? ».

3°) Soit le nombre 13 renvoie à une grandeur alors que le nombre 4 est sans dimension. Dans ce cas, la fraction $13/4$ (pour $13 \text{ mm} / 4$, par exemple) se lit également « 13 divisé par 4 » mais elle renvoie au partage de la totalité des 13 mm en 4 parties égales. Il s'agit d'une « division-partition de la pluralité ».

4°) Soit, enfin, le nombre 13 est sans dimension et il opère sur $1/4$ (13 fois un quart de mm, par exemple). La fraction $13/4$ se lit alors « 13 quarts » et il s'agit d'une « partition de l'unité suivie d'une multiplication », que nous appellerons, de manière abrégée, « fractionnement de l'unité ».

Quatre significations sont ainsi distinguées : proportion, rapport, partition de la pluralité et fractionnement de l'unité. La situation apparaît donc singulièrement complexe. À terme, les élèves doivent s'approprier ces différents sens de $13/4$. Nous verrons qu'au CM1, l'accès aux deux premiers sens ne nous semble pas constituer un objectif raisonnable. Seule une « sensibilisation » à ces usages des fractions est d'actualité. En revanche, nous montrerons qu'il est très important que, dès ce niveau de la scolarité, les enfants s'approprient l'équivalence : « 13 partagé en 4 » (division-partition de la pluralité), c'est aussi « 13 quarts » (fractionnement de l'unité).

Ce que nous a appris ce « détour épistémologique »

D'un point de vue conceptuel, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent millièmes près, par exemple). Si l'invention des décimaux est récente, le projet auquel ils répondent est, lui, très ancien, et il existe une façon élémentaire de réaliser ce projet : l'utilisation des fractions unitaires $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$, etc. Mais les décimaux ne sont pas des fractions unitaires et dès qu'une fraction n'est pas unitaire, sa complexité conceptuelle

2. On trouve une synthèse récente dans : Carpenter, T., Fennema, E. & Romberg, T., *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum, 1993.

3. On procède ainsi à ce qu'on peut appeler une « analyse suivant les dimensions ». Il est étonnant que ce type d'analyse ne soit pas plus souvent utilisé, parce qu'elle mène à une classification qui ne distingue pas trop de cas et, surtout, parce qu'elle conduit à une classification qui semble pertinente d'un point de vue psychologique.

s'accroît. Concernant la fraction « 3 sur 4 », par exemple, nous verrons qu'il ne va pas de soi que « 3 divisé par 4 » est égal à « 3 quarts ».

Finalement, toute pédagogie des décimaux dépend cruciallement de la réalisation de deux objectifs, que nous allons examiner successivement :

1°) Aider les élèves à s'approprier le projet auquel répondent les décimaux.

2°) Les aider à surmonter les difficultés de conceptualisation inhérentes aux fractions qui ne sont pas unitaires.

Un obstacle important à la réalisation du premier objectif est le fait que les décimaux s'écrivent souvent sous la forme de nombres à virgule, et qu'alors les élèves peuvent être victimes d'une sorte d'effet « Canada Dry »⁴.

Les décimaux écrits avec une virgule : ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers

D'un point de vue conceptuel, on vient de le voir, l'intérêt fondamental des nombres décimaux est intrinsèquement lié à leur nature de fractions : ils permettent d'approcher la mesure de n'importe quelle grandeur continue d'aussi près que l'on veut (au cent millièmes près, par exemple). Or cette nature de fraction est masquée par l'écriture sous forme de nombres à virgule.

En effet⁵ :

– Quand on écrit les décimaux sous forme de nombres à virgule, ils ressemblent à des entiers et non à des fractions. Remarquons par exemple que dans cette forme d'écriture, comme dans celle d'un entier, il existe toujours un « chiffre des unités », alors que ce n'est pas le cas dans l'écriture des fractions. Dans 358 m, par exemple, c'est le chiffre « 8 » qui désigne directement des mètres (les autres désignent des dizaines, etc.). Dans 42,56 m, c'est le chiffre « 2 ». En revanche, dans 4 256/100 m, aucun chiffre ne renvoie directement à des mètres parce que le dénominateur indique un fractionnement de cette unité (il s'agit de 100^{ièmes} de mètre) et le numérateur le nombre de tels fractionnements retenus : le « 6 » de 4 256 désigne donc des 100^{ièmes} et non des unités.

– De même, quand on calcule avec les décimaux écrits sous forme de nombres à virgule, qu'il s'agisse d'une addition, d'une soustraction ou d'une multiplication, la façon d'opérer est très proche de celle qu'on utilise avec les entiers et éloignée de celle qu'on utilise avec les fractions. Pour l'addition et la soustraction, dans les cas des écritures à virgule

4. Rappelons qu'il s'agit d'une marque de boisson dont la publicité, à un moment, disait qu'« Elle a la couleur de l'alcool, elle a le goût de l'alcool, mais ce n'est pas de l'alcool. »

5. L'analyse des nombres à virgule qui suit est très inspirée de : Hiebert, J., « Mathematical, Cognitive and Instructional Analyses of Decimal Fraction », in Leinhardt, Putnam & Hatrup (Eds), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum, 283-322, 1992.

comme dans celui des entiers, on commence par positionner les chiffres en colonnes. Dès lors, dans le maniement de ces écritures à virgule, il ne reste plus de trace visible de la « réduction au même dénominateur » ($14/100 + 3/10 = 14/100 + 30/100$), qui est caractéristique de l'addition ou de la soustraction des fractions. Pour la multiplication, avec les écritures à virgule, on commence par « faire comme s'il n'y avait pas de virgule » ; on a donc très vite l'impression d'opérer sur des entiers.

– Enfin, un adulte qui oralise un nombre à virgule (13,62 par exemple), énonce successivement deux entiers : il dit le plus souvent « treize virgule soixante-deux » et non « treize virgule soixante-deux centièmes ». Dans la première façon d'oraliser, la plus courante vraisemblablement parce qu'elle est la plus courte, le mot « centièmes » a disparu, il ne subsiste aucun indice du fait qu'on désigne ainsi une fraction. Là encore, la façon d'oraliser les nombres à virgule est proche de celle des entiers, éloignée de celle des fractions.

En résumé, les nombres décimaux, dès qu'ils sont écrits avec une virgule, ressemblent à des entiers, ils se manipulent comme des entiers, ils s'oralisent le plus souvent comme des entiers alors que, fondamentalement, d'un point de vue conceptuel, ce sont des fractions. L'écriture à virgule est un système économique de notation des décimaux qui facilite les calculs mais qui masque leur véritable nature.

Un premier choix fondamental : enseigner d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales

Toute progression pédagogique concernant les décimaux conduit d'abord à s'interroger sur le mode d'écriture qu'il convient d'enseigner en premier : faut-il commencer par les nombres à virgule ou par les fractions décimales ?

Nous avons choisi d'enseigner d'abord les décimaux sous la forme de fractions décimales. Ce choix résulte en premier lieu d'analyses que G. Brousseau a été le premier à développer⁶. Longtemps, les décimaux ont été enseignés comme un recodage de mesures entières. Dans une telle approche, 3,25 mètres, c'est, par définition, 325 cm. Ou encore : 3,25 est défini comme l'écriture de 325 « en prenant la centaine comme unité ». Du coup, l'idée de fractionnement disparaît. Ce système de notation fonctionne comme celui des heures et des minutes, à la différence près que le groupement se fait par 10. On parle souvent à propos d'un tel système de « nombres complexes ». Il se différencie de celui des décimaux du fait qu'on y groupe des unités, sans jamais les fractionner. Les nombres décimaux ont été inventés pour permettre d'approcher la mesure d'une grandeur continue d'aussi près que l'on veut, grâce à des fractionnements de plus en plus

6. Brousseau, G., « Problèmes de l'enseignement des décimaux », *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 1, 1, 11-58, 1980.
Brousseau, G., « Problèmes de didactique des décimaux », *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 2, 1, 37-128, 1981.

fins (dixièmes, centièmes, etc.). C'est leur raison d'être. Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc « passer à côté » de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent les inventer eux-mêmes⁷.

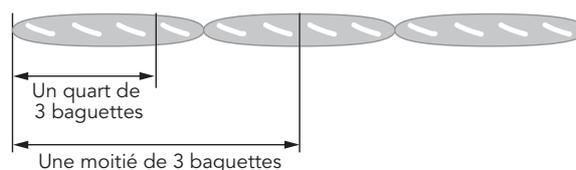
Une autre progression pédagogique est évidemment souhaitable : celle où l'on commence par présenter aux élèves les fractions, dont les fractions décimales, en utilisant la barre de fraction comme système de notation ; puis, dans un deuxième temps, l'écriture à virgule de ces fractions décimales. Rappelons que l'écriture à virgule des nombres décimaux est une conquête récente de l'humanité (elle date de la Renaissance). Vouloir que les enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture, alors qu'elle masque leur véritable nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales. Ce parcours est, à notre sens, le seul qui laisse un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels.

Cependant, ce premier choix n'est pas suffisant. La disparition de l'idée de fractionnement n'est pas le seul risque qu'encourt une progression. Il faut de plus s'intéresser à la manière dont on enseigne le fractionnement.

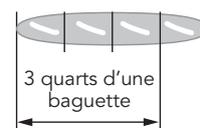
Une équivalence fondamentale pour conceptualiser les fractions : partition de la pluralité et fractionnement de l'unité

Nous avons vu qu'une écriture telle que $3/4$ peut avoir quatre sens : 3 pour 4 (proportion), 3 divisé par 4 dans le cas du rapport (c'est-à-dire de la division-quotition), 3 divisé par 4 dans le cas de la division-partition de la pluralité et 3 quarts (fractionnement de l'unité). Montrons que même lorsqu'on s'intéresse seulement aux derniers sens, qui sont les plus simples, leur équivalence ne va pas de soi. Il n'est guère évident que « 3 divisé par 4 » (partition de la pluralité) et « 3 quarts » (fractionnement de l'unité) conduisent au même résultat.

S'il s'agit de partager une quantité de 3 baguettes de pain en 4 parts égales, par exemple, pour procéder à la partition de cette totalité (« 3 divisé par 4 »), on peut prendre la moitié de 3 baguettes :



Il ne va guère de soi que la grandeur d'une part corresponde à 3 quarts de baguette ($3/4$), c'est-à-dire s'obtient aussi de la manière suivante : on prend une seule baguette (et non plus 3) ; on la partage en 4 et l'on considère la partie formée par 3 de ces morceaux.



C'est seulement dans le cas des fractions unitaires que les deux sens coïncident de manière évidente : 1 divisé par 2, c'est, par définition, 1 demi ; de même, 1 divisé par 3, c'est, par définition, un tiers, etc. Dès qu'on n'est plus dans le cas de fractions unitaires, l'équivalence entre la partition de la pluralité et le geste mental consistant en un fractionnement de l'unité ne va plus de soi.

Or cette équivalence est celle qui « fonde » le concept de fraction⁸ : elle justifie le fait que les deux gestes mentaux précédents soient désignés de la même façon, par la barre de fraction, et qu'on puisse lire indifféremment $13/4$ comme « 13 divisé par 4 » ou comme « 13 quarts », c'est-à-dire, à loisir, substituer un geste à l'autre⁹.

Un deuxième choix fondamental : donner d'abord du sens à a/b dans un contexte de partition de la pluralité

Une progression pédagogique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas suffisante pour que les enfants conceptualisent ces nombres. En effet, depuis une dizaine d'années, il est courant que les maîtres procèdent ainsi et rien n'indique que, de façon globale, les élèves, aujourd'hui, conceptualisent mieux les décimaux qu'auparavant.

L'explication de ce phénomène est vraisemblablement la suivante : les enfants conceptualisent mal les décimaux (et ceci bien qu'on les leur présente comme fractions décimales)

7. Il est dommage que certains pédagogues continuent de parler systématiquement de décimaux à propos d'écritures telles que 3,25 € ou 3,600 km ; ils n'aident guère les enseignants à y voir clair dans les enjeux de l'enseignement des décimaux. La notation à virgule, si elle ne s'accompagne pas de l'idée de fractionnement, ne désigne pas des décimaux. Les élèves de CE1 savent manier les écritures à virgule pour désigner des euros et des centimes alors qu'ils sont encore loin de connaître les dixièmes et les centièmes. Lorsqu'on adopte résolument le point de vue de la conceptualisation chez les élèves, face à une écriture telle que 3,25 €, il faut être prudent et parler *a priori* d'un nombre à virgule et non d'un décimal. Pour un élève donné, un nombre à virgule ne désigne un nombre décimal que s'il est capable d'en expliciter la notation en termes de dixièmes, centièmes, etc.

8. Le concept de fraction (ou plutôt de rationnel) se « fonde » évidemment dans plusieurs équivalences : celles-ci « jettent des ponts » entre les différents sens d'un rationnel que nous avons distingués. L'équivalence abordée ici est quand même plus « fondamentale » que les autres parce que c'est la première qui est accessible aux élèves : sans elle, il n'y a plus de conceptualisation.

9. Nous n'aborderons pas ici l'équivalence suivante : « En 3, combien de fois 4 ? Réponse : 3 quarts de fois. » Et pourtant, c'est seulement lorsqu'on a établi la double équivalence entre, d'une part, « 3 partagé en 4 » (aspect partition) et « En 3, combien de fois 4 ? » (aspect quotition) et, d'autre part, « 3 quarts », qu'on peut prétendre avoir établi l'équivalence entre « 3 divisé par 4 » et « 3 quarts ». Cependant, cette autre équivalence, « En 3, combien de fois 4 ? Réponse : 3 quarts de fois » est plus complexe et relève, selon nous, plutôt du programme du CM2 et du collège. D'où le choix fait ici.

parce que, plus généralement, ils conceptualisent mal les fractions. En effet, dans la quasi-totalité des progressions, lors de la séance d'introduction des fractions, le sens dont on favorise l'appropriation est celui qui est lié au fractionnement de l'unité ($11/4$ est d'abord défini comme « onze quarts »). Or un tel choix rend extrêmement difficile l'appropriation de l'équivalence : « onze quarts » c'est aussi « onze divisé par 4 ». Nous allons montrer qu'il est bien préférable de donner du sens à $11/4$ dans un contexte de partition de la pluralité (« 11 divisé par 4 ») avant de le faire dans un contexte de fractionnement de l'unité.

Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture $11/4$ comme « 11 quarts »

La question importante est la suivante : comment les pédagogues qui introduisent ainsi les fractions amènent-ils les enfants à s'approprier l'équivalence fondamentale, c'est-à-dire à comprendre que 11 quarts, c'est 11 divisé par 4 ? Les enfants sont censés le découvrir lors de la recherche de la partie entière de $11/4$ en raisonnant comme suit : à chaque fois qu'il y a 4 quarts dans 11 quarts, cela fait une unité ; il faut donc chercher : « En 11 quarts, combien de fois 4 quarts ? », c'est-à-dire faire la division de 11 par 4.

En apparence un tel raisonnement semble établir l'équivalence fondamentale. Mais en apparence seulement. En effet, être capable de mobiliser la division comme outil pour trouver la partie entière d'une fraction n'assure nullement que, réciproquement, on sache que toute division peut être considérée comme la recherche de la partie entière d'une fraction.

Si on demande à quelqu'un d'inventer un problème correspondant à $11 : 4$, il est très probable que le problème proposé sera du type partition de la totalité (4 objets de même prix valent 11 €) ; peut-être sera-t-il du type quotient (1 m de tissu vaut 4 €, j'en ai acheté pour 11 €). Il n'y a pratiquement aucune chance que le problème inventé soit du type : « 11 personnes mangent chacune un quart de pizza. Quelle est la quantité de pizzas nécessaire ? ». Ainsi, on peut savoir que pour chercher la partie entière de $11/4$, il convient de calculer « 11 divisé par 4 » sans savoir que « $11 : 4 = 11/4$ ».

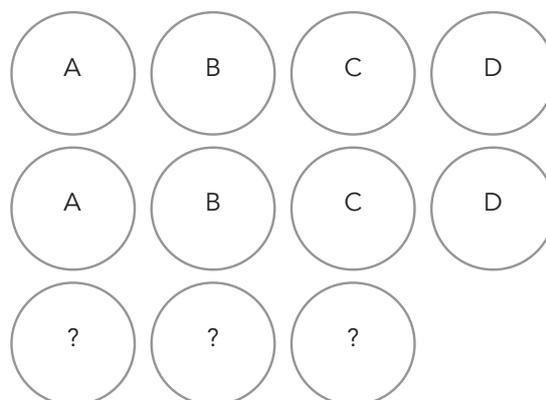
Fondamentalement, la raison en est que « $11 : 4$ » évoque une pluralité d'unités alors que $11/4$ évoque une pluralité de quarts d'unités. Ce ne sont pas les mêmes objets psychologiques sur lesquels on opère : lors de la recherche de la partie entière, le « monde de la division » et « le monde des fractions » ne sont que très localement reliés. Pour l'essentiel, ils restent des « mondes séparés ».

Lorsque $11/4$ est introduit comme 11 quarts, il est donc très difficile d'établir l'équivalence $11 : 4 = 11/4$. Mais la situation est pire concernant $3 : 4$ (cas des fractions inférieures à 1). En effet, lorsqu'on cherche la partie entière de $11/4$ ainsi : « Dans 11 quarts, il y a 2 fois 4 quarts et il reste 3 quarts », à aucun moment on ne cherche à connaître « 3 divisé par 4 ». Le sens « 3 quarts » est le seul qui soit mobilisé dans ce raisonnement. En somme, si la recherche de la partie entière de $11/4$ n'établit pas l'équivalence « $11 : 4 = 11/4$ », concernant l'équivalence « $3 : 4 = 3/4$ » c'est bien pire : elle n'est pas même abordée.

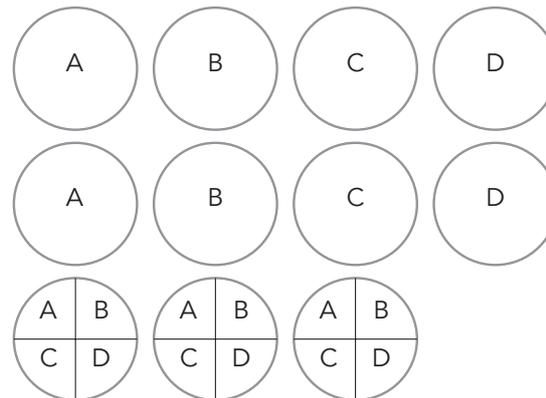
Il ne faut pas s'étonner qu'une moitié seulement des élèves sachent que $67 : 100 = 67/100$ à l'entrée en 6^e (Évaluation nationale 1997). Le seul moment pédagogique censé les aider à comprendre cette équivalence n'a pas pu fonctionner.

Ce qui advient lorsqu'on introduit l'écriture $11/4$ comme « 11 divisé par 4 » dans un contexte de partition de la pluralité

Supposons qu'il faille partager équitablement 11 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D. On commence par donner 2 pizzas à chacun.



Mais il faut de plus donner du sens à « 3 partagé en 4 ». Le partage de 3 pizzas entre 4 personnes notées A, B, C et D conduit le plus souvent au schéma suivant :



L'écriture qu'on introduit pour rendre compte du partage des 11 pizzas est la suivante : $11/4 = 2 + 3/4$.

Elle se lit « 11 divisé par 4 est égal à 2 (quotient de la division euclidienne) plus le reste 3, lui-même divisé par 4 ». Le schéma précédent montre qu'on va pouvoir faire le lien entre « 3 divisé par 4 » et « 3 quarts » (la suite de la progression est exposée plus loin).

Par ailleurs, une différence importante avec la progression qui vient d'être analysée est la suivante : dès son introduction, la barre de fraction acquiert l'un des deux « grands sens » de la division, celui qui est prototypique : la partition. Il n'y aura donc aucune difficulté, le moment venu, à faire le lien avec l'usage de la touche « : » de la calculette : la barre de fraction, comme cette touche, sert à résoudre cette large classe de problèmes. Le « monde de la division » et « le monde des fractions » ont en commun tous les problèmes dont la sémantique évoque une partition. Ils sont donc très largement

reliés, alors que dans la progression qui commence par « 11 quarts », il y a toutes les chances pour que ces mondes ne le soient que très localement.

Par ailleurs, quand il s'agit, au CM2, d'apprendre à « pousser la division après la virgule » pour faire une approximation décimale du résultat d'une division comme $17 : 3 (= 5,666\dots)$, le fait de connaître une expression exacte du résultat ($5 + 2/3$) aidera les enfants à comprendre la notion même de valeur approchée : quand on peut exprimer ce vers quoi on tend, on comprend mieux la nature même du geste d'approximation. Finalement, le choix d'introduire la barre de fraction dans un contexte de partition de la pluralité plutôt que dans un contexte de fractionnement de l'unité aide, d'une part, à l'appropriation de l'équivalence fondamentale qui fonde la notion de fraction, et, d'autre part, à comprendre que les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue. En résumé, ce choix aide doublement à la conceptualisation des décimaux.

Commencer par le sens le moins « naturel » ?

Abordons une dernière objection possible. On peut considérer que la partition de la pluralité est un sens moins « naturel » que celui qui est lié au fractionnement de l'unité. Pour partie, ce sentiment résulte du fait que l'oralisation la plus fréquente de a/b est a $b^{\text{ièmes}}$.

Du coup, cela peut sembler paradoxal de commencer par le sens le moins naturel (a divisé par b). Ce paradoxe repose en grande partie sur une confusion. En effet, le sens *divisé*, bien que peu naturel, n'en est pas pour autant plus difficile : « peu naturel » et « difficile » ne sont pas synonymes. Il y a bien des choses auxquelles on ne pense pas « naturellement » et qui, quand on les découvre, paraissent simples (« Comment n'y ai-je pas pensé plus tôt ? »). Plus haut, nous avons commencé à présenter une façon simple d'introduire une « nouvelle division », celle où l'on partage le reste, de la noter a/b tout en disant aux élèves que cette écriture se lit « a divisé par b ». Nous verrons que la suite de cette progression n'offre pas plus de difficultés.

Allons même plus loin : lorsque le sens le moins naturel n'est pas plus difficile à acquérir que l'autre, il faut résolument aborder ce sens le moins naturel en premier. En effet, au CM1, la séquence où l'on étudie pour la première fois les fractions est, pour les élèves, un évènement. La nouveauté du sujet abordé crée une sorte de « prime à l'apprentissage » pour le sens qui est privilégié lors de cette situation d'introduction. Il est donc judicieux de réserver cette « prime à l'apprentissage » au sens des fractions qui est le moins naturel : la partition de la pluralité. Sinon, on l'attribue au sens le plus naturel et on ne fait que renforcer la difficulté d'accéder à l'autre sens. En l'affaire, il n'y a pas de symétrie !

Notre choix, en l'occurrence, est identique à celui que nous avons avancé dans le cas de la division euclidienne. Celle-ci, en effet, repose sur l'équivalence entre la partition et la quotition. C'est la quotition, c'est-à-dire le sens le moins naturel (celui qui n'est pas véhiculé par le mot « partage »), que nous

avons choisi de privilégier lors de la situation d'introduction de cette opération.

La notion de conflit entre l'économie de la représentation et celle du calcul pour enseigner l'équivalence qui fonde le concept de fraction

Lorsque le pédagogue a choisi de donner du sens à a/b dans un contexte de partition de la pluralité, comment peut-il s'y prendre pour que la même écriture, a/b , acquière l'autre sens ? Comme dans le cas de la soustraction ou de la division euclidienne, le concept central que nous utiliserons pour penser la progression est celui de *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*.

L'utilisation de ce concept amène, comme dans le cas de la soustraction et de la division euclidienne, à distinguer 4 sortes de problèmes qu'il va nous falloir ordonner parce qu'ils constitueront autant de jalons sur le parcours des enfants.

Ces problèmes sont obtenus en croisant deux facteurs :

– La sémantique de l'énoncé qui détermine l'économie de la représentation : l'énoncé décrit-il une situation de partition de la pluralité ou de fractionnement de l'unité ?

– La taille relative des nombres qui détermine l'économie du calcul : a est-il supérieur à b (la fraction est supérieure à 1) ou bien a est-il inférieur à b ? Dans ce dernier cas, en effet (par exemple, pour 3 pizzas partagées en 4, ce qu'on écrit $3/4$), le calcul économique est celui qui consiste à opérer sur une seule pizza plutôt que d'en utiliser trois, c'est-à-dire à utiliser le geste mental du fractionnement de l'unité. Dans le cas de $153/4$, en revanche, la recherche de la partie entière invite à calculer la division de 153 par 4, c'est-à-dire à utiliser le geste de la partition de la pluralité.

Les deux facteurs qui déterminent l'économie de la représentation et du calcul

Premier facteur : la sémantique de l'énoncé

On partage a unités en b parties égales.

Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

On prend a fois un $b^{\text{ième}}$ d'une unité.

Quelle est la valeur totale ?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

Second facteur : les valeurs numériques

$a = 153$ et $b = 4$ $153/4$

Calcul économique : partition de la pluralité
(153 divisé par 4)

$a = 3$ et $b = 4$ $3/4$

Calcul économique : fractionnement de l'unité
(3 fois un quart)

Les 4 énoncés obtenus en croisant ces deux facteurs sont rapportés ci-dessous.

Dans les problèmes B et D, il y a donc un *conflit entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul* au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est différent de celui qui conduit à un calcul économique. Ces problèmes favorisent la substitution d'un geste mental à l'autre qui lui est équivalent. Ils joueront donc un rôle important dans la progression.

Dans les problèmes A et C, on peut parler au contraire de *concordance entre l'économie de la représentation et l'économie du calcul*, au sens où le geste mental qui conduit à une représentation économique est le même que celui qui conduit à un calcul économique.

Quatre problèmes qui jalonnent le début de la progression

Problème A

On partage 153 unités en 4 parts égales.

Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

Calcul économique : partition de la pluralité

Problème B

On partage 3 unités en 4 parts égales.

Quelle est la valeur d'une part ?

Représentation économique : partition de la pluralité

Calcul économique : fractionnement de l'unité

Problème C

On prend 3 fois un quart d'une unité.

Quelle est la valeur totale ?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

Calcul économique : fractionnement de l'unité

Problème D

On prend 153 fois un quart d'une unité.

Quelle est la valeur totale ?

Représentation économique : fractionnement de l'unité

Calcul économique : partition de la pluralité

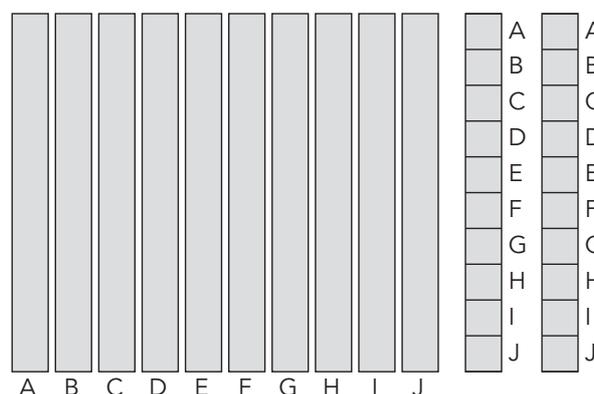
Première étape : a/b est défini comme « a divisé par b »

Pour la leçon d'introduction (cf. séquence 58), nous avons donc choisi de privilégier le « geste mental » de la partition de la pluralité. C'est évidemment un problème de type A (situation de partage d'une quantité continue a en b parts, quand a est supérieur à b) qui servira de support pour une telle séquence parce que dans un tel problème, l'économie de la représentation, comme celle du calcul, invitent à mettre en œuvre le geste mental de la partition de la pluralité, ce qui en facilite l'enseignement.

Au cours de cette séance, les enfants ont, par exemple, à résoudre les problèmes suivants : « 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants. Quelle sera la part de chaque enfant ? » et « 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants. Quelle sera la part de chaque enfant ? »¹⁰.

Dans le cas du premier problème, sa résolution conduit à introduire la barre de fraction, symbole d'une nouvelle division « où l'on partage le reste » : $7/3 = 2 + 1/3$, qui se lit « 7 divisé par 3 est égal à 2 plus le reste, c'est-à-dire 1, lui-même divisé par 3 ».

Le deuxième problème conduit à l'égalité : $12/10 = 1 + 2/10$ qui se lit « 12 divisé par 10 est égal à 1 plus le reste, c'est-à-dire 2, lui-même divisé par 10 ». La schématisation qui accompagne la résolution de ce second problème est moins évidente que celle du premier. Elle est reproduite ci-dessous (chacun des 10 enfants est représenté par les lettres A, B... J) :



On voit que lorsqu'il s'agit de partager les deux barres restantes de chocolat entre 10 personnes, les enfants proposent la plupart du temps que chaque barre soit partagée en 10 et que chaque personne forme sa part en prélevant « un divisé par dix » sur chacune des barres. Ce mode de résolution est en effet le plus accessible (il s'agit du « premier niveau de résolution » de ce type de problème).

Remarque :

Devant des écritures du type $3/4$, $2/10$, etc., il est important de les oraliser, à ce moment de la progression, par « 3 divisé par 4 », « 2 divisé par 10 », etc. Cela ne sera pas facile pour l'enseignant, car ses habitudes sont plutôt de dire « 3 quarts », « 2 dixièmes », etc. Mais c'est l'objectif de l'étape suivante d'établir l'équivalence entre ces deux façons de s'exprimer. La seule exception à cette recommandation est celle où le numérateur est 1, car alors « 1 quart » est de manière évidente synonyme de « 1 divisé par 4 ». Dès lors, quand des élèves utilisent la formulation « 1 quart », il est normal de la retenir tout en lui donnant le synonyme « 1 divisé par 4 ».

10. Une situation où il s'agirait de partager 123 barres entre 10 enfants serait préférable parce que favoriserait mieux la division du point de vue du calcul (parce que a est très supérieur à b), mais le souci d'autoriser le dessin d'un schéma qui représente la situation nous a conduits à commencer par une valeur numérique plus petite et à interroger ensuite dans le cas de valeurs numériques plus grandes.

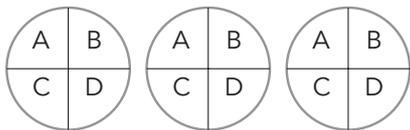
Deuxième étape : « 3 partagé en 4 », c'est « 3 quarts »

La barre de fraction a été introduite dans un contexte où elle renvoie à la partition de la pluralité. Notre objectif est maintenant que les élèves s'approprient l'équivalence entre ce geste mental de partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité. Les problèmes de type B (la sémantique est du côté de la partition de la pluralité, mais le calcul économique du côté du fractionnement de l'unité) sont évidemment adaptés à un tel objectif : les enfants commencent par se représenter le geste de partition de la pluralité, l'économie du calcul les conduit à l'autre geste.

Dans la séquence correspondante (séquence 61), les élèves sont confrontés à une activité où ils doivent partager équitablement 3 pizzas entre 4 enfants (Anne, Betty, Céline et Diane), mais dans deux contextes différents.

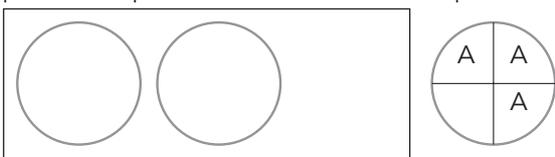
Dans le premier de ces contextes, les élèves ont la possibilité de partager chacune des pizzas, alors que dans l'autre contexte il n'est plus possible de procéder ainsi parce qu'une seule des pizzas est sortie du four, et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres.

Nous avons déjà présenté la procédure que la plupart des enfants adoptent dans le premier de ces contextes (chaque enfant est désigné par son initiale A, B, C ou D) :



Pour partager équitablement 3 pizzas entre 4 personnes, le premier niveau de procédure que des enfants (ou même des adultes) emploient consiste en effet à partager chacune d'elles en 4.

Or il n'est plus possible de procéder ainsi dans le second contexte. En effet, une seule pizza est sortie du four et Anne doit prélever sa part sans toucher aux autres pizzas.



C'est à ce moment que les élèves sont susceptibles de prendre conscience que lors d'un partage équitable de 3 pizzas entre 4 personnes, la valeur d'une part est de 3 fois un quart.

Remarque :

On pourrait croire que l'enfant qui partage chaque pizza en quarts et qui prélève un quart sur chacune d'elles (1^{er} niveau de procédure) utilise l'équivalence fondamentale (3 partagé en 4, c'est 3 quarts). En fait, l'apparence est trompeuse parce que lorsqu'il s'y prend ainsi, l'enfant utilise la même procédure que pour partager équitablement une pizza, une quiche et une tarte. Rien n'assure que les quarts prélevés sur chacune des trois pizzas soient considérés comme égaux. En revanche, le prélèvement de chaque quart sur la même pizza atteste de

cette égalité et, finalement, de l'équivalence entre « 3 divisé par 4 » et « 3 quarts ».

Troisième étape : équivalences d'écritures et comparaison de fractions

Dans la troisième étape, notre objectif est d'aider les enfants à s'approprier le geste mental qu'ils viennent tout juste de découvrir : celui du fractionnement de l'unité. Nous utilisons pour cela des situations comme celle du problème C (« On prend 3 fois un quart d'une unité. Quelle est la valeur totale ? ») parce que la représentation économique et le calcul économique sont tous les deux associés au fractionnement de l'unité.

Une question se pose cependant : avec un tel énoncé, le maître sollicite une schématisation (prendre les $\frac{3}{4}$ d'une pizza, par exemple) mais ne pose pas réellement un problème. En fait, cette partie de la progression correspond au travail sur les équivalences d'écritures ($\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, par exemple) et les comparaisons de fractions (« comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{10}$ », par exemple). Elle concerne les séquences 67 et 70.

En effet, certaines équivalences d'écritures doivent nécessairement être enseignées dès le CM1, bien qu'elles n'apparaissent pas explicitement au programme. C'est le cas, par exemple, de l'équivalence $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ qui justifie qu'avec les écritures à virgule, on puisse écrire $0,3 = 0,30$ (on peut « écrire un zéro » à droite des chiffres après la virgule !). Il est par ailleurs souhaitable d'enseigner dès le CM1 que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ ou encore que $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ et $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$. Ces égalités sont fondamentales parce qu'elles fixent des repères entre 0 et 1. Par exemple, savoir que $\frac{5}{10}$ est la moitié de 1 et que $\frac{7}{10}$ est plus petit que $\frac{3}{4}$ aide à situer $\frac{6}{10}$ entre 0 et 1.

Elles joueront par ailleurs un rôle fondamental dans l'étude des pourcentages au CM2.

Un tel enseignement peut prendre deux formes :

- soit on enseigne la règle de la réduction au même dénominateur dans sa plus grande généralité (« On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre ») puis on applique cette règle aux cas particuliers tels que $\frac{3}{10} = \frac{?}{100}$;
- soit on enseigne directement les seules équivalences qui « sont au programme », en s'appuyant sur une représentation imagée, sans se soucier si les enfants abstraient ou non la règle générale.

C'est cette seconde solution que nous avons évidemment retenue parce que, pour justifier la règle générale, il faut utiliser l'argument de la compensation¹¹ qu'il est difficile de comprendre pour des élèves de cet âge.

11. Un fractionnement étant donné, si on décide de fractionner chaque partie en parties n fois plus petites, il suffit de retenir n fois plus de ces nouvelles parties pour que la quantité globale soit conservée. Ce type de raisonnement relève de ce que Piaget appelait les opérations formelles.

Quatrième étape : « 155 tiers », c'est aussi « 155 divisé par 3 »

L'équivalence entre le geste mental de la partition de la pluralité et celui du fractionnement de l'unité a déjà été étudiée, lors de la deuxième étape : il s'agissait de prendre conscience qu'un problème dont l'énoncé parle d'une partition de la pluralité peut se résoudre par un fractionnement de l'unité. Dans l'étape présente (cf. séquence 71), l'équivalence sera établie « en sens inverse » : il s'agit de prendre conscience qu'un problème dont l'énoncé parle d'un fractionnement de l'unité peut se résoudre par une partition de la pluralité, c'est-à-dire en faisant une division.

Nous utiliserons évidemment l'autre type de problèmes dans lequel l'économie de la représentation est en conflit avec celle du calcul : les problèmes de type D (On prend 155 fois un tiers d'une unité. Quelle est la valeur totale ?).

La dynamique d'une telle séance va de soi : on dispose de 155 tiers ; or, à chaque fois qu'on a 3 tiers, cela correspond à une unité ; on est donc amené à chercher : « En 155 tiers, combien de fois 3 tiers ? ». D'où la mobilisation de la division euclidienne.

Les autres choix fondamentaux et la fin de la progression

À ce moment de la progression, les enfants se sont appropriés les deux sens de l'écriture a/b ; ils savent produire des écritures équivalentes de $1/2$, $1/4$, $3/4$, $1/10$, $2/10$... et ils savent comparer ces fractions simples. Ils n'ont toujours pas additionné ces fractions simples. Cela relève d'un choix délibéré.

Ne pas introduire d'emblée l'addition des fractions

Même lorsqu'on limite l'apprentissage de l'addition aux quelques fractions simples du programme (demis, quarts, dixièmes et centièmes), une difficulté surgit, que les enfants rencontrent pour la première fois : face à $3/4 + 57/100$, par exemple, les élèves voient des nombres (3, 4, 57, 100), ils voient le signe « + », symbole de l'addition entre les entiers, et ils doivent absolument se garder d'additionner ces nombres sous la forme $60/104$, par exemple (ce qui correspond à la somme des numérateurs et à celle des dénominateurs). La façon dont les enfants ont l'habitude d'opérer avec le signe « + » et les écritures d'entiers ne doit pas « contaminer » l'usage des mêmes symboles dans le cas des fractions !

Pour les maîtres, il ne s'agit pas seulement d'enseigner un nouveau savoir-faire, il s'agit de l'enseigner dans un contexte où les enfants peuvent avoir l'impression (fausse) qu'ils savent déjà faire. Le problème qu'on leur pose ressemble à un problème qu'ils savent résoudre depuis longtemps.

Dans leur future scolarité, ils auront évidemment bien d'autres occasions de se retrouver dans une telle situation. Dès le CM2, par exemple, ils seront conduits à calculer $52 \times 0,25$ et à trouver un résultat plus petit que 52 ! Alors que pendant plusieurs années, la multiplication a toujours donné

un résultat plus grand que les deux nombres de départ, ce n'est plus le cas !

L'addition de deux fractions est leur première rencontre avec ce type de situation. Cet obstacle au calcul de $3/4 + 57/100$ sera mieux surmonté si les enfants ont une bonne maîtrise conceptuelle des entités représentées par $3/4$ et $57/100$.

C'est pourquoi nous avons choisi d'introduire le signe « + » après que les enfants se soient appropriés les deux sens de l'écriture a/b , aient appris à en produire des écritures équivalentes et à comparer les fractions simples du programme (cf. séquences 75 à 78, 83 et 84).

Utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement

Les élèves disposent de règles en carton qui sont graduées en stylos, $1/2$ stylo, $1/4$ de stylo, $1/10$ de stylo et $1/100$ de stylo (voir par exemple séquence 78).

Les différentes activités qu'ils mènent avec ce matériel consistent à :

- Repérer une longueur, soit à partir de l'origine de la règle, soit entre deux points, et se rappeler, à cette occasion, que $12/100 = 1/10 + 2/100$ ou encore que $20/100 = 2/10$.

- Comparer la longueur de deux lignes brisées : pour cela, il faut mesurer les lignes brisées (tous les résultats sont fractionnaires), puis sommer les mesures obtenues (et donc calculer $93/100 + 7/10$, par exemple) et comparer les résultats qui, évidemment, sont des nombres fractionnaires.

- S'ils ont obtenu $1 + 63/100$ et $2 + 4/10$ comme longueurs respectives de chaque ligne brisée exprimées en stylos, on leur demande laquelle de ces longueurs est la plus proche de 2 stylos. Ils sont donc amenés à se représenter des écarts de longueurs, en s'aidant de leur règle par exemple : entre le repère $1 + 63/100$ et le repère 2, sur la règle, il y a $37/100$. Or ce nombre est plus petit que $4/10$.

- Ils ont à résoudre ce même type de problèmes, mais hors contexte :

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

$1 + 85/100$ ou $2 + 2/10$

Le lecteur aura reconnu, dans ce type de problèmes, ceux dont nous avons souligné l'importance dans l'introduction de ce texte, parce qu'ils constituent un bon test de la conceptualisation des décimaux chez l'enfant (cf. J. Bolon, 1996).

- Ils doivent enfin ordonner des nombres donnés tantôt sous forme de « division-fraction », tantôt par leur décomposition en entiers, dixièmes et centièmes, par exemple.

Supposons que les premières de ces activités soient menées avec le double décimètre plutôt qu'avec une règle graduée en stylos. Les enfants utiliseraient alors leurs schèmes familiaux de mesure en millimètres et centimètres et n'utiliseraient d'aucune façon le fait que le millimètre est le centième du décimètre ou encore que le centimètre en est le dixième.

Le pédagogue n'a pas le choix : s'il veut que ses élèves procèdent à des activités de mesure en reportant mentalement un étalon et ses fractions décimales, il ne faut pas

que cet étalon entre dans un système conventionnel de mesure que les enfants utilisent depuis plusieurs années et dans lequel le $1/10$, le $1/100$, etc. de l'unité ont des noms spécifiés (le décimètre, le centimètre, par exemple) et fonctionnent eux-mêmes comme unités entières à l'intérieur de ce qu'on a appelé précédemment un système de « nombres complexes ». Sinon, il n'y a que les très bons élèves qui font l'effort d'essayer de traduire leurs connaissances anciennes (mm, cm, dm) dans le vocabulaire nouveau que le maître leur propose ($1/100$, $1/10$ et unité). La grande majorité des élèves résolvent ces problèmes avec leurs connaissances anciennes et toute idée de fractionnement disparaît. L'idée de décimal disparaît avec elle.

Certains pédagogues seront peut-être étonnés de l'usage que nous faisons des pizzas, verres de jus d'orange, tablettes de chocolat ou règles graduées en stylos, mais l'usage préalable de ces unités non conventionnelles nous semble incontournable.

Enseigner l'écriture à virgule comme un simple changement de notation

L'écriture à virgule des nombres décimaux est introduite en utilisant la calculatrice (séquences 93 et 95). Les élèves savent que la « division-fraction » $143/10$ a pour résultat $14 + 3/10$ et la « division-fraction » $7\ 893/100$ pour résultat $78 + 93/100$. En revanche, quand on tape ces opérations sur une calculatrice (avec la touche « : »), on voit apparaître 14.3 pour $143/10$ et 78.93 pour $7\ 893/100$. En examinant d'autres cas et notamment des « divisions-fractions » par 2 et 4, les élèves découvrent facilement le principe de l'affichage de la calculatrice : elle sépare la partie entière et la partie fractionnaire par un point, le chiffre immédiatement à droite du point désigne des dixièmes et celui encore à droite des centièmes (les millièmes sont étudiés au CM2).

L'écriture avec le point ou avec la virgule est donc introduite comme un simple changement de notation. Au moment de cette introduction, les enfants savent déjà coordonner les deux sens de l'écriture a/b , ils savent comparer, additionner les fractions simples, déterminer des écarts, etc. Toutes les connaissances nécessaires sont ainsi déjà là. C'est délibérément que nous avons choisi de favoriser leur appropriation en utilisant la barre de fraction comme système de notation parce que l'écriture à virgule masque la véritable nature de ces nombres.

Au CM1, terminer la progression sur les décimaux, c'est, pour l'essentiel, continuer à faire fonctionner les mêmes connaissances dans le contexte où les exercices sont proposés avec des nombres à virgule plutôt qu'avec des fractions. Or, pour favoriser le transfert des connaissances d'un contexte à l'autre, nous allons montrer qu'il est essentiel de faire oraliser les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Remarque sur l'utilisation de la calculatrice lors de ces séquences :

Un premier objectif de ces séquences est évidemment le changement de notation (des fractions décimales vers les

nombres à virgule), que nous avons qualifié de « simple » parce qu'aucune connaissance nouvelle n'est introduite à cette occasion. Cependant, l'enjeu de ces séquences, grâce à l'usage de la calculatrice, est plus important qu'il n'y paraît de prime abord : ce n'est pas seulement l'équivalence entre la notation fractionnaire et la notation à virgule des nombres décimaux qui est en jeu dans ces séquences, c'est aussi l'équivalence entre le signe « divisé » de la calculatrice, porteur de tous les usages sociaux de la division, et la barre de fraction. Ces séquences font partie de celles qui contribuent à relier étroitement le « monde de la division » à celui des fractions. Ainsi, à ce moment de la progression, l'égalité $67 : 100 = 67/100 = 0,67$ qui, d'habitude, est si difficile à comprendre pour les élèves, apparaît comme allant de soi. La raison en est que, dès le début de la progression, on s'est donné les moyens de relier entre elles les différentes significations en jeu dans ces écritures : « 67 divisé par 100 », c'est « 67 centièmes » (équivalence dont nous avons montré qu'elle fonde le concept de fraction).

Faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, centièmes, etc.

Considérons par exemple l'exercice suivant, que les enfants ont appris à résoudre lorsqu'il est posé avec des fractions.

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

$$1 + 85/100 \text{ ou } 2 + 2/10$$

Après l'introduction des écritures à virgule, le même exercice est posé sous la forme :

Quel est le nombre le plus proche de 2 ?

$$1,85 \text{ ou } 2,2$$

Si le pédagogue est soucieux d'obliger les élèves à oraliser 1,85 sous la forme « 1 virgule 85 centièmes » et 2,2 sous la forme « 2 virgule 2 dixièmes », plutôt que « 1 virgule 85 » et « 2 virgule 2 », comme le font souvent les adultes, il suffit que l'élève oralise la consigne pour que l'énoncé du deuxième exercice apparaisse immédiatement comme renvoyant à la même tâche que le premier. L'élève est alors en mesure de le résoudre immédiatement : « À partir de 1 virgule 85 centièmes, il faut 15 centièmes pour aller à 2. En revanche, 2 virgule 2 dixièmes est à 2 dixièmes de 2, c'est-à-dire 20 centièmes de 2. C'est 1 virgule 85 centièmes le plus proche de 2 ».

C'est seulement lorsqu'on procède à une telle oralisation « signifiante » que la tâche avec les nombres à virgule n'offre pas plus de difficulté que la même tâche avec les écritures fractionnaires. L'enseignant qui adopterait la progression que nous avons élaborée sans exiger une telle oralisation ferait un beau gâchis : il aurait consacré beaucoup de temps pour que les enfants s'approprient le concept de décimal lorsque ces nombres sont représentés par des fractions, et, par la suite, il ne se donnerait pas les moyens pour que les enfants réinvestissent toutes ces connaissances quand ces nombres sont représentés sous leur forme la plus fréquente mais la plus leurrante : celle des écritures à virgule.

Conclusion

Pour enseigner un contenu tel que les fractions simples et les décimaux, un grand nombre de progressions sont évidemment possibles. Pour situer celle qui a été présentée ici dans cet ensemble de possibles, esquissons une comparaison avec les deux progressions qui servent le plus souvent de références : celles de R. Douady¹², d'une part, et de G. Brousseau¹³, d'autre part.

Ces progressions se présentent comme des suites de situations qui permettent que les élèves aient une responsabilité importante dans le processus d'élaboration des connaissances. L'enchaînement des significations y est par ailleurs minutieusement étudié. Ces auteurs ont été parmi les premiers à se donner le projet d'élaborer ce genre de progressions qui relèvent d'une sorte d'« épistémologie expérimentale ». Leur travail a donc été pionnier.

De plus, il convient de souligner leur rôle précurseur quant au choix fondamental, qui a été aussi le nôtre, d'enseigner les fractions avant les décimaux.

Mais au-delà de ce choix, il existe des différences importantes entre les progressions qu'ils ont élaborées et celle qui a été avancée ici.

Une comparaison avec les deux progressions de référence, celles de R. Douady et de G. Brousseau

R. Douady introduit les fractions en s'appuyant sur le modèle du fractionnement de l'unité (7/4 est défini comme 7 fois un quart de l'unité). De notre point de vue, faire un tel choix, c'est renforcer le modèle le plus « naturel », celui qui est véhiculé par le langage quotidien, et donc faire obstacle à l'appropriation par les élèves de l'autre modèle (celui de la partition de la pluralité). Dans la progression avancée par Douady, « pousser » la division $a : b$ trois chiffres après la virgule, par exemple, revient à situer la fraction a/b au millièmes près. Elle pose donc comme évidente l'équivalence $a : b$ et a/b , ce qui est loin d'être le cas pour les enfants lorsque l'écriture fractionnaire est introduite avec le sens a/b *bièmes*. Comme nous l'avons montré, il y a là un « glissement de sens » qui, de notre point de vue, est très gênant.

Brousseau, lui, introduit les fractions dans la situation suivante : il faut trouver un moyen de désigner l'épaisseur d'une feuille de papier alors que cette épaisseur est trop petite pour qu'on la mesure directement. Les enfants établissent donc que si 19 feuilles mesurent 2 mm, alors 38 feuilles mesurent 4 mm, etc. Dans la situation où 50 feuilles ont une épaisseur totale de 4 mm, la fraction est introduite de la façon suivante (p. 17) : « On dit que (ce) papier a une épaisseur de 4 mm pour cinquante feuilles ou encore (4 pour cinquante) millimètres et,

le plus souvent, de 4 cinquantièmes de mm, et on écrit ceci à l'aide de la fraction 4/50. »

À première vue, une telle formulation est critiquable puisque, de manière purement verbale, on passe subrepticement du modèle de la partition de la pluralité (4 mm pour cinquante) à celui du fractionnement de l'unité (4 cinquantièmes de mm). En fait, les enfants ne mobilisent ni l'un, ni l'autre de ces deux modèles. En effet, en ce début de progression, à aucun moment l'enseignant ne parle ni de fractionnement, ni de partage. Ainsi, pour savoir si 57/35 est plus petit ou plus grand que 1 mm, les enfants (p. 36 - 7^e séance de la progression) n'utilisent ni la partition de la pluralité (57 mm partagés en 35, ça fait combien ?), ni le fractionnement de l'unité (57 fois un trente-cinquième de mm, c'est combien ?). Ils raisonnent ainsi : 1 mm, c'est quand on a une épaisseur de 35 mm pour 35 feuilles ; quand on a 57 mm pour 35 feuilles, c'est plus que 35 mm pour 35 feuilles. Les enfants raisonnent donc sur des couples d'entiers et non sur le fractionnement ou la partition d'entiers.

Remarquons que la situation qui sert à Brousseau pour introduire les fractions et la nôtre sont similaires, mais elles sont utilisées de façons très différentes : alors qu'il aurait pu mettre d'emblée les enfants dans une situation de mesure en leur faisant déterminer la mesure « absolue » d'une feuille (si une épaisseur totale de 2 mm est obtenue avec 19 feuilles, quelle est l'épaisseur d'1 feuille ?), il a choisi de faire raisonner les enfants avec des « mesures relatives » (2 pour 19, c'est comme 4 pour 38, etc.), c'est-à-dire de traiter cette situation sur le modèle des proportions¹⁴. Quand le maître introduit la barre de fraction, c'est d'ailleurs l'oralisation de la proportion (« a pour b ») qui est privilégiée. Le mot « divisé » est soigneusement évité, peut-être parce qu'il conduirait les enfants à chercher une « mesure absolue » (2 mm divisé par 19). Remarquons que le choix de la grandeur à mesurer est cohérent avec cette option théorique : une épaisseur de 2 mm pour 19 feuilles est si petite qu'elle semble *a priori* peu accessible à la seule mesure que connaissent les enfants, c'est-à-dire la « mesure absolue »¹⁵.

Examinons maintenant comment des enfants qui raisonnent ainsi sur des couples d'entiers s'approprient l'équivalence entre la partition de la pluralité et le fractionnement de l'unité. Considérons, par exemple, l'équivalence « 3 divisé par 4 », c'est « 3 quarts ». Comme nous l'avons vu, la difficulté résulte du fait que la première expression renvoie à une pluralité d'unités tandis que la seconde renvoie à une pluralité de fractions de l'unité et qu'on ne raisonne donc pas sur les mêmes objets psychologiques.

Dans la progression de Brousseau, avec le vocabulaire qu'il utilise, cette relation s'exprime : « 3 mm pour 4 » est une épaisseur 3 fois plus grande qu'une autre de « 1 mm pour 4 ». Or, le fait de raisonner ainsi sur des couples d'entiers fait disparaître la difficulté car les objets psychologiques sont alors homogènes. Mais la difficulté est-elle réellement sur-

12. Douady, R., « Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans) », *Recherches en didactique des mathématiques*, 1, 1, 77-110, 1980.

13. L'exposé le plus complet se trouve dans : Brousseau, G. & Brousseau, N., *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux, Irem de Bordeaux, 1987. Les références de pages qui suivent concernent cet ouvrage.

14. Brousseau parle de « commensuration de l'unité ».

15. À l'opposé, dans notre progression, on commence par un « problème de type A », c'est-à-dire où on partage 153 unités en 4 parts égales !

montée ou ne l'est-elle qu'en apparence ? Est-elle surmontée conceptuellement, parce que les enfants se sont approprié une équivalence entre des *gestes mentaux* ? Ou bien s'agit-il seulement d'une équivalence « formelle » qui renvoie seulement à des *règles de manipulation d'écritures* ?

La suite de la progression permet de répondre à cette question. En effet, après la somme et la différence de deux fractions, les élèves apprennent à multiplier puis à diviser une fraction par un entier. Pour calculer $11/3 : 9$, ils apprennent qu'il faut multiplier par 9 le dénominateur de cette fraction ($11/27$) ou multiplier par 9 le dénominateur de n'importe quelle fraction qui lui est égale. Cependant, à la 39^e séance (p. 145), pour trouver le résultat de $11 : 9$, les enfants ont besoin que le maître fasse un rappel collectif : « $11 = 11/1$ et pour diviser une fraction, on multiplie son dénominateur ».

La suite des écritures est donc la suivante :

$$11 = 11/1$$

$$11 : 9 = 11/1 : 9$$

$$11 : 9 = 11/1 \times 9$$

$$11 : 9 = 11/9$$

Autrement dit, les enfants sont plus à l'aise pour calculer $11/3 : 9$ que $11 : 9$ (cf. p. 148)¹⁶. Dans cette progression, le moins qu'on puisse dire est que l'égalité $11 : 9 = 11/9$ ne va pas de soi !

Plus généralement, ce type de raisonnement sur des classes de couples d'entiers¹⁷ nous semble hors de portée d'un grand nombre d'élèves du cours moyen. Piaget appelait cette sorte d'opérations intellectuelles « au second degré » (parce que ce sont des opérations sur des opérations) des « opérations formelles ». Il considérait que ce genre d'opérations intellectuelles n'est guère accessible avant 12 ans. Ainsi, certains enfants, dans la progression de Brousseau, éprouvent longtemps des difficultés à tout simplement comprendre que $4/50$ est un nombre qui mesure une épaisseur et non seulement un couple de nombres qui désigne un tas de feuilles (cf. p. 18). Cela n'est guère étonnant. Il ne s'agit pas, selon nous, de difficultés liées à tel ou tel point marginal de la progression. Il convient de s'interroger sur la pertinence de ce type de progression pour des élèves de cours moyen.

Quels résultats dans les classes expérimentales ?

La progression présentée ici est donc très différente de ces deux progressions de référence. Elle est tout aussi différente des progressions classiques (aucune, à notre connaissance, n'enseigne, comme nous le faisons, la partition de la pluralité avant la partition de l'unité).

Au-delà de ces comparaisons, que dire des résultats obtenus dans les classes expérimentales ? Considérons à nouveau l'exercice suivant.

Quel est le nombre le plus proche de 7 ?

6,9 ou 7,08

Nous avons vu que la réussite à cet exercice témoigne vraisemblablement d'une bonne conceptualisation des décimaux et qu'il n'est habituellement réussi que par 30 % environ des élèves en CM2, 6^e et même 5^e.

Dans les classes expérimentales qui ont testé une première version de la progression présentée ici, nous avons observé 75 % environ de réussite en fin de CM1, y compris dans des écoles situées en ZEP.

Un tel résultat doit évidemment être apprécié dans son contexte. D'une part, les populations expérimentales réussissent toujours mieux que les populations d'élèves qui travaillent dans des conditions plus ordinaires. D'autre part, à travers les activités présentées ici, le lecteur aura perçu que la réussite à cet exercice faisait partie de nos objectifs alors que d'habitude, ce type de tâche n'est guère travaillé en classe. Qu'on nous permette cependant de souligner un point important : les 75 % de réussite ont été obtenus sans jamais enseigner aux élèves la moindre règle du type : « Je ne change pas la valeur d'un nombre décimal en écrivant des zéros à droite de la virgule. » La réussite observée résulte de connaissances conceptuelles et non de « trucs » qui permettent d'obtenir la solution sans avoir compris.

Il est clair cependant que seul un emploi plus généralisé de ce type de progression permettra d'en apprécier plus justement la valeur.

16. Un tel phénomène est révélateur de ce qu'on peut appeler une « dérive formaliste » de la progression.

17. Exemple de raisonnement sur des classes de couples : « Comme je ne sais pas diviser 11 par 9, je divise une fraction qui appartient à la même classe par 9. »

Chapitre 5

Proportionnalité, conversions et décimaux au CM2

PLAN DU CHAPITRE

- **Un thème central au CM2 : la proportionnalité.**
 - Des situations où une valeur totale s'obtient par itération d'une valeur à l'unité constante.
 - Résolutions proches d'une résolution par l'action vs résolutions expertes.
- **Penser le progrès des élèves.**
 - L'enfant peut être expert dans l'usage de la proportionnalité dans un domaine, novice dans un autre.
 - Un domaine où il est intéressant d'enseigner l'usage de la proportionnalité à un niveau expert : les conversions d'unités de mesures.
 - Le double statut du retour à l'unité.
 - L'évolution des choix pédagogiques concernant la proportionnalité.
- **L'enseignement des fractions et des décimaux au CM2.**
 - Les fractions, résultats d'une nouvelle division.
 - La division « poussée après la virgule ».
 - La multiplication d'un décimal par un entier.
- **Conclusion.**

Les chapitres précédents figuraient déjà dans le guide pédagogique de CM1. Celui-ci est spécifique au CM2. Trois notions y sont traitées : la proportionnalité, les conversions d'unités de mesure et les décimaux.

Un thème central au CM2 : la proportionnalité

Plutôt que de définir d'emblée la proportionnalité à l'aide du langage mathématique, nous commencerons ci-dessous par présenter différents problèmes qui relèvent de la proportionnalité, afin d'explicitier ce qu'ils ont en commun. À l'école élémentaire, en effet, les situations de proportionnalité n'apparaissent jamais d'emblée sous une forme mathématisée et la démarche adoptée ici est donc celle qui rend le mieux compte du processus de leur reconnaissance.

Des situations où une valeur totale s'obtient par itération d'une valeur à l'unité constante

Nous allons successivement considérer ci-dessous 5 problèmes différents :

Problème n° 1 :

« Des objets sont tous vendus le même prix à l'unité. 3 objets valent 18 €. Quel est le prix de 5 objets ? ».

Problème n° 2 :

« On dispose de baguettes identiques. Quand on met bout à bout 3 de ces baguettes, la longueur totale est de 18 cm.

Quelle est la longueur totale de 5 baguettes mises bout à bout ? »

Ces deux premiers problèmes ont en commun qu'une valeur totale correspondant à 5 unités (un prix total dans le problème n° 1, une longueur totale dans le n° 2) est inconnue et qu'on ne connaît pas non plus la valeur de chacune de ces unités. En revanche, on sait que cette valeur est constante : chaque objet vaut le même prix et chacune des baguettes, donc chacune des longueurs, est identique aux autres.

Dans les deux cas, il est facile de déterminer cette valeur à l'unité constante parce qu'on se trouve face à un problème de division classique : quelle est la valeur d'1 unité, connaissant celle de 3 unités ? Et la valeur à l'unité constante ayant été déterminée, il est facile d'achever la résolution parce qu'on se trouve face à un problème de multiplication classique : quelle est la valeur de 5 unités, connaissant celle de 1 unité ?

Problème n° 3 :

« Au Royaume-Uni, les longueurs se mesurent en pieds et pouces. On sait que 1 pied vaut 12 pouces. Combien y a-t-il de pouces dans 4 pieds ?... Dans 7 pieds ? Et, plus généralement, dans n pieds ? »

Ce problème n° 3 est un problème de conversion : une longueur étant mesurée en pieds, quelle est sa mesure en pouces ? Contrairement aux précédents, la solution s'obtient directement par une multiplication : 1 pied vaut 12 pouces, 2 pieds valent 12×2 pouces, 3 pieds valent 12×3 pouces et

4 pieds valent 12×4 pouces. En continuant, on verrait que 7 pieds valent 12×7 pouces et que, de façon générale, n pieds valent $12 \times n$ pouces. Ce problème a en commun avec les précédents que la valeur totale en pouces se calcule par itération d'une valeur à l'unité constante : 12 pouces par pied.

Problème n° 4 :

« Mme Dupont a acheté 3 chaises pour 42 €.

Mme Durand a acheté 4 chaises identiques pour 52 €. Qui a payé le moins cher ? »

La question de ce problème peut surprendre un jeune enfant : Mme Dupont a dépensé 42 € et Mme Durand 52 €. C'est de toute évidence la première qui a payé le moins cher. Mais l'énoncé stipule que pour cette somme, elle n'obtient que 3 chaises contre 4 pour Mme Durand. Il est donc possible de comparer leurs achats à un autre niveau que celui qui vient spontanément à l'esprit d'un jeune enfant, en comparant les couples : 42 € pour 3 et 52 € pour 4. Or cette comparaison conduit à calculer les prix à l'unité correspondant à chacun des achats, c'est-à-dire à considérer chacune des deux sommes 42 € et 52 € comme résultant d'une itération de valeurs à l'unité constante.

Problème n° 5 :

« En mathématiques, Sophie a eu 3 notes et en tout elle a eu 42 points. Léa, qui est dans la même classe, a eu 4 notes et en tout elle a eu 52 points.

Qui a obtenu les meilleurs résultats ? »

Dans tous les problèmes précédents, une valeur totale se calculait ou s'interprétait comme le résultat d'une itération d'une valeur à l'unité. Or le problème n° 5 semble différent : pour comparer les résultats de Sophie (3 notes et 42 points en tout) et de Léa (4 notes et 52 points en tout), on est conduit à calculer des moyennes. *A priori* la notion de moyenne et celle de valeur à l'unité constante semblent ne pas avoir partie liée. Mais en l'occurrence, l'apparence est trompeuse : calculer la moyenne de 3 notes, c'est faire comme si le total des notes résultait de l'itération d'une même note (par exemple, faire comme si l'on était dans une situation de proportionnalité). Une moyenne, c'est une valeur à l'unité constante fictive. On remarquera qu'il est intéressant d'évoquer cette fiction parce qu'elle renseigne sur la réalité. Par exemple : la valeur à l'unité constante fictive qu'est une moyenne de notes est souvent interprétée comme indiquant la « valeur normale » d'une note et elle permet alors de savoir si telle ou telle note est « anormale ».

En résumé, les problèmes précédents diffèrent par bien des aspects et notamment du point de vue des opérations mathématiques qui permettent d'en obtenir la solution, mais ils conduisent tous à calculer ou à interpréter une valeur totale comme résultant de l'itération d'une valeur à l'unité constante. C'est ce qui caractérise les situations de proportionnalité à l'école élémentaire.

Au-delà de cette caractéristique commune, le problème de conversion (problème n° 3) peut apparaître de nature différente parce qu'il se résout par une simple multiplication. Pour mieux cerner ce qu'il a en commun avec les autres, il faut avancer une définition plus mathématique de la pro-

portionnalité ; dans tous les problèmes précédents, il est question d'une grandeur qui varie en fonction d'une autre : le prix en fonction du nombre d'objets achetés, la longueur totale en fonction du nombre de baguettes juxtaposées, le nombre de pouces en fonction du nombre de pieds, le total de points en fonction du nombre de notes. Et, dans tous les cas, la valeur totale se calcule à l'aide de formules similaires : Prix de n unités = $n \times$ Prix de 1 unité

Longueur de n unités = $n \times$ Longueur de 1 unité

Nombre de pouces pour n pieds = $n \times$ Nombre de pouces pour 1 pied

Points pour n notes = $n \times$ Points fictifs de « 1 note normalisée » soit, en appelant F une fonction quelconque :

$F(n) = n \times F(1)$ où $F(1)$, qu'on appelle le « coefficient de proportionnalité », s'interprète comme une valeur à l'unité constante. D'un point de vue mathématique, la proportion-

nalité se caractérise par l'existence d'une telle fonction qui, à un nombre n , fait correspondre le produit de ce nombre par une constante. De manière évidente, les situations de conversion correspondent bien à une telle situation : convertir une mesure de n pieds en pouces, c'est multiplier n par 12.

Avant de clore cette présentation de la notion mathématique de proportionnalité, il convient de remarquer, d'une part, que la variable de la fonction précédente a été notée n plutôt que x , comme cela se fait habituellement, et, d'autre part, qu'on a le plus souvent utilisé le mot « itération » plutôt que le mot « produit » pour décrire le calcul d'une valeur totale.

De manière générale, cette notation n est utilisée pour désigner des valeurs entières d'une variable et le mot « itération » est, lui, utilisé quand l'un des facteurs d'un produit est un nombre entier. Or l'une et l'autre de ces conditions sont effectivement réalisées dans l'étude de la proportionnalité à l'école élémentaire. Pour l'essentiel, en effet, on s'y limite à des valeurs entières de n . Des problèmes tels que la recherche du prix de 4,58 kg de viande à 7 € le kilo, qui conduiraient à faire le produit d'un nombre décimal par un entier dans le cas où le décimal est le multiplicateur sont aux marges du programme de l'école élémentaire (dans la progression adoptée ici, ce type de problème n'est abordé qu'en toute fin d'année).

Afin de mieux définir la notion de proportionnalité, il convient de préciser qu'en mathématiques, une telle limitation n'a pas cours et qu'on y parle de proportionnalité dès qu'il existe une fonction qui, à un nombre quelconque x (entier ou non) fait correspondre un autre nombre $F(x)$, produit du précédent par un facteur constant qui est l'image de l'unité¹ :

$$x \mapsto F(x) = x \times F(1)$$

1. Nous avons pris ici comme point de départ la réalité quotidienne pour ensuite essayer de dégager progressivement le concept de proportionnalité en montrant son caractère unificateur et structurant. On trouve une analyse de la proportionnalité plus approfondie, mais rédigée dans le même esprit, dans : Rouche, N., *Le Sens de la mesure*, Bruxelles, Didier Hatier, 1992.

Résolutions proches d'une résolution par l'action vs résolutions expertes

Considérons maintenant le problème suivant, un peu différent du problème n° 4 :

« Mme Dupont a acheté 3 chaises identiques pour 42 €. Mme Durand a acheté 4 de ces mêmes chaises pour 42 €. Qui a payé le moins cher ? »

Il n'est pas nécessaire de calculer les prix à l'unité correspondant à chacun de ces achats pour répondre : tout se passe en effet comme si Mme Durand avait bénéficié d'une chaise gratuite !

Considérons de même le problème suivant :

« On forme un liquide sucré en mélangeant 3 litres d'eau et 15 g de sucre. Avec 6 litres d'eau, combien faut-il mettre de sucre pour obtenir un liquide qui a la même saveur sucrée ? »

Une solution très intuitive consiste à imaginer la constitution de deux échantillons de 3 litres en mettant 15 g de sucre dans chaque. Pour avoir le mélange voulu, il suffit de mélanger ces deux échantillons. Il est clair que cela revient à mettre $15\text{ g} + 15\text{ g} = 15\text{ g} \times 2 = 30\text{ g}$ de sucre dans 6 litres d'eau.

Comme dans le cas du problème précédent, la résolution de celui-ci ne nécessite pas d'avoir calculé une valeur à l'unité constante. De plus, il ne nécessite même pas d'avoir compris que la saveur sucrée d'un tel mélange dépend d'une telle valeur à l'unité constante : la masse de sucre par litre d'eau (ce qu'on appelle parfois le taux de sucre).

Ces modes de résolution où l'on évoque un scénario compatible avec l'énoncé (celui de la 4^e chaise gratuite ou encore celui d'un mélange d'échantillons qui conduit au mélange désiré) sont proches d'une résolution par l'action. Ils sont généralement accessibles aux élèves avant tout enseignement parce qu'ils font essentiellement appel à une expérience quotidienne. On remarquera cependant qu'ils nécessitent des jeux de données numériques particuliers. Dès que ce n'est plus le cas, la difficulté s'accroît considérablement.

Considérons par exemple le problème suivant :

« On forme un liquide sucré en mélangeant 3 litres d'eau et 270 g de sucre et un autre en mélangeant 4 litres d'eau et 320 g de sucre. Lorsqu'on les goûte, lequel apparait le plus sucré ? ».

Sa résolution n'est simple que lorsqu'on sait que la saveur sucrée de tels mélanges dépend de leurs taux de sucre. Mais comprendre cette notion de taux, ce n'est pas seulement savoir qu'il se calcule grâce à la relation : Taux = masse de sucre pour n litres/ n , c'est aussi disposer de connaissances relatives aux mélanges homogènes. Par exemple : si l'on double, triple, etc. de manière concomitante la quantité d'eau et la dose de sucre d'un tel mélange, la saveur sucrée s'en trouve inchangée. Or le taux est, d'un point de vue mathématique, un rapport, c'est-à-dire un être mathématique qui a des propriétés analogues : lorsqu'on en double, triple, etc. le numérateur et le dénominateur de manière concomitante, il se trouve inchangé.

En d'autres termes, comprendre la notion de taux, ce n'est pas seulement disposer de connaissances mathématiques concer-

nant la proportionnalité, c'est aussi disposer de connaissances relatives au monde physique et savoir que propriétés mathématiques et propriétés physiques se correspondent. L'expert, face à un problème de proportionnalité, est donc celui qui, outre des connaissances mathématiques, a développé des connaissances dans le domaine concerné.

De plus, il convient de remarquer que l'expert a non seulement accès à la résolution générale de ces problèmes (celle qui utilise la relation multiplicative mettant en jeu le coefficient de proportionnalité), mais il conserve évidemment la possibilité de choisir telle ou telle résolution proche de l'action parce qu'elle apparait plus simple dans le contexte particulier du problème. La principale caractéristique d'un expert est en effet qu'il dispose d'une pluralité de stratégies, ce qui lui offre la possibilité d'un choix.

Penser le progrès des élèves

Avant tout enseignement, l'enfant n'est donc pas complètement démuné face à de nombreux problèmes de proportionnalité : il a souvent accès à l'un des modes de résolution dont nous avons dit qu'ils sont proches d'une résolution par l'action. La question qui se pose aux pédagogues est évidemment la suivante : comment les élèves accèdent-ils à terme à l'expertise dans la résolution des divers problèmes de proportionnalité ?

L'enfant peut être expert dans l'usage de la proportionnalité dans un domaine, novice dans un autre

Pour penser le progrès des élèves, il convient d'abord d'insister sur le fait qu'il ne résulte pas seulement de l'acquisition de connaissances mathématiques. Comme nous venons de le voir, s'approprier le concept de taux, par exemple, c'est s'approprier des connaissances relatives aux mélanges homogènes.

Il est donc tout à fait normal que les élèves sachent résoudre des problèmes de proportionnalité à un niveau expert dans tel ou tel domaine dont ils ont une grande expérience, alors qu'ils ne savent les résoudre que dans des cas favorables et par des procédures proches de l'action dans tels autres domaines éloignés de leur expérience quotidienne. Considérons par exemple les problèmes suivants :

« Qui a payé le moins cher ? Mme Dupont qui a acheté 3 chaises identiques pour 48 € ou Mme Durand qui a acheté 4 de ces mêmes chaises pour 52 € ? »

et :

« Quel est le mélange le moins sucré ? L'un obtenu avec 3 cl d'eau et 48 g de sucre ou un autre obtenu avec 4 cl d'eau et 52 g de sucre ? ».

Ils ont la même structure, comportent les mêmes données numériques. Cependant, de manière évidente, le premier de ces problèmes est plus facile que le second. Les enfants ont en effet une expérience précoce du prix à l'unité ; ce coefficient de proportionnalité correspond à une réalité sociale dont quiconque traite quotidiennement : les prix affichés

chez les commerçants. Ce n'est évidemment pas le cas avec la masse de sucre par unité de volume et, sauf expériences de vie particulières, cette notion ne peut guère se construire ailleurs qu'à l'école.

Alors que deux problèmes ont la même structure, l'enfant est donc susceptible d'être expert face à l'un et novice, voire en échec, face à l'autre. On remarquera qu'une stratégie pédagogique particulièrement intéressante consiste à présenter aux élèves, au cours d'une même séance, ces deux sortes de problèmes. C'est ce qui est fait par exemple dans la séquence 94 (pages 136 et 137) :

Je découvre

1 Julien est au rayon des fruits et légumes. Les prix indiqués sont proportionnels au poids. Aide-le à choisir.

Je cherche les produits les moins chers.

a. Quelles carottes choisir ?		b. Quelles pommes choisir ?	
Carottes Bojardin 1,65 € les 2 kg	Carottes Sakrok 1,90 € les 2 kg	Pommes golden 3 kg pour 3,35 €	Pommes reinettes 4 kg pour 3,35 €
c. Quelles tomates choisir ?		d. Quelles bananes choisir ?	
Tomates de Provence 4 € les 3 kg	Tomates du Languedoc 3,85 € les 5 kg	Bananes de Martinique 4 kg pour 3,60 €	Bananes du Cameroun 5 kg pour 4,65 €

J'ai appris Dans une situation de proportionnalité, si les prix sont donnés sous la forme : « 3 kg pour 2,42 € », « 6,29 € les 3 m », « 10 € les 12 litres », etc., pour connaître le produit le moins cher, il n'est pas toujours nécessaire de calculer le prix à l'unité.

Problèmes proposés dans la séquence 94 (page 136)

3 Voici divers mélanges d'eau et de sucre. Aide Karim.

Dans chaque cas, je cherche le mélange le plus sucré.

a. Mélange A ou B ?		b. Mélange C ou D ?	
Mélange A 13 g de sucre dans 3 L d'eau	Mélange B 17 g de sucre dans 3 L d'eau	Mélange C 27 g de sucre dans 4 L d'eau	Mélange D 27 g de sucre dans 3 L d'eau
c. Mélange E ou F ?		d. Mélange G ou H ?	
Mélange E 9 g de sucre dans 4 L d'eau	Mélange F 11 g de sucre dans 3 L d'eau	Mélange G 25 g de sucre dans 4 L d'eau	Mélange H 31 g de sucre dans 5 L d'eau

J'ai appris Lorsqu'on dissout du sucre (ou du sel, du savon, etc.) dans de l'eau, pour connaître le mélange le plus sucré (ou le plus salé, le plus savonneux, etc.), il n'est pas toujours nécessaire de calculer la quantité de sucre (ou de sel, de savon, etc.) par unité de volume d'eau.

Problèmes proposés dans la séquence 94 (page 137)

L'idée générale d'une telle stratégie pédagogique est de favoriser la construction d'analogies de structures entre les situations-problèmes où l'enfant est expert et celles où il ne l'est pas, pour lui permettre de progresser tant dans la compréhension des situations-problèmes difficiles que dans l'appropriation des savoir-faire permettant de traiter ces situations.

On notera en particulier que dans la séquence 94, on propose des cas difficiles dans chacun des deux contextes (la comparaison des prix à l'unité avec 4 kg pour 3,60 € et 5 kg pour 4,65 € et la comparaison des saveurs sucrées avec 25 g de sucre dans 4 l d'eau et 31 g de sucre dans 5 l d'eau),

mais on propose aussi des cas faciles (la comparaison des prix à l'unité avec 3 kg pour 3,35 € et 4 kg pour 3,35 € et la comparaison des saveurs sucrées avec 27 g de sucre dans 4 l d'eau et 27 g de sucre dans 3 l d'eau, par exemple) : la résolution de problèmes faciles, par des procédures proches de l'action, aide en effet à la construction d'analogies de structures et, donc, au progrès.

Un domaine où il est intéressant d'enseigner l'usage de la proportionnalité à un niveau expert : les conversions d'unités de mesures

Relativement à la proportionnalité, l'enfant peut être expert dans un domaine et novice dans un autre, avons-nous dit. Montrons qu'il y a un domaine où il est intéressant de développer chez les élèves un comportement d'expert : c'est celui des conversions d'unités de mesures.

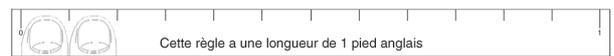
Apprendre à convertir d'une unité vers l'unité immédiatement inférieure ou supérieure

Rappelons-nous l'un des problèmes que nous avons utilisés au début de ce chapitre (le n° 3) :

« En Grande-Bretagne, les longueurs se mesurent en pieds et pouces. On sait que dans 1 pied, il y a 12 pouces.

Combien y a-t-il de pouces dans 4 pieds ?... Dans 7 pieds ? Et, plus généralement, dans n pieds ? ».

Du fait de la valeur à l'unité constante (12 pouces pour 1 pied), la conversion d'une mesure exprimée en pieds en la mesure correspondante exprimée en pouces est un problème de proportionnalité : la mesure en pouces s'obtient en multipliant celle en pieds par 12. Or, il est simple d'enseigner cela à des élèves de CM2 (cf. séquence 21). Il suffit, dans un premier temps, de faire mesurer divers segments avec une règle comme celle ci-dessous (représentée à l'échelle 1/4).



Il suffit ensuite d'amorcer la suite des correspondances : 1 pied vaut 12 pouces, 2 pieds valent (12 + 12) pouces, 3 pieds valent (12 + 12 + 12) pouces, etc., pour comprendre que, de façon générale : n pieds valent 12 × n pouces. Une mesure en pied se convertit donc en mesure en pouce en la multipliant par 12, et inversement une mesure en pouce se convertit en une mesure en pied en la divisant par 12 (la plupart du temps, il reste évidemment des pouces !). Pour qui, face à une mesure en pied (7 pieds, par exemple), hésiterait sur le sens de cette transformation, il lui suffit de former l'image mentale des pouces dans les 7 pieds (comme sur la règle graduée) pour se rappeler que : « il y a plus de pouces, il y en a 12 fois plus ». D'où la multiplication.

Or le même raisonnement vaut pour les heures, les minutes et les secondes, bien sûr, mais aussi pour les m, dm, cm, mm, d'une part, et les m², dm², cm² et mm², de l'autre (ainsi, d'ailleurs, que pour les unités plus grandes). Considérons par exemple la relation 1 dm² = 100 cm² : il s'ensuit que 2 dm² = (100 + 100) cm², 3 dm² = (100 + 100 + 100) cm²... et, de

manière générale : $n \text{ dm}^2 = (100 \times n) \text{ cm}^2$. Une mesure en dm^2 se convertit donc en mesure en cm^2 en la multipliant par 100, et inversement une mesure en cm^2 se convertit en une mesure en dm^2 en la divisant par 100 (la plupart du temps, il reste évidemment des cm^2 !). Pour qui, face à une mesure exprimée en dm^2 (7 dm^2 par exemple), hésiterait sur le sens de cette transformation, il lui suffit de former l'image mentale des 7 carrés de 1 dm^2 quadrillés en petits carrés de 1 cm^2 pour se rappeler que : « il y a plus de cm^2 , il y en a 100 fois plus ». D'où la multiplication.

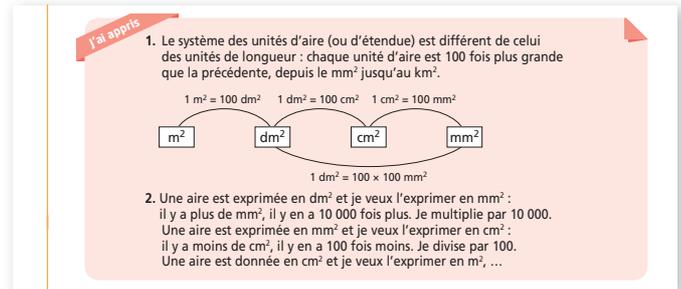
L'enfant qui, pour convertir en minutes une durée exprimée en heures, la multiplie par 60 (ou qui, pour convertir en dm une mesure exprimée en cm la divise par 10, etc.), fait une seule opération (il fait, selon les cas, une multiplication ou une division), alors que de nombreux problèmes de proportionnalité se résolvent en enchaînant une division et une multiplication. Mais si l'élève effectue cette seule opération sans avoir besoin de repasser par toutes les étapes des raisonnements précédents (1 h vaut 60 min, alors 2 h valent 120 min...), on peut dire qu'il manie la proportionnalité à un niveau expert. Il utilise en effet d'emblée la relation multiplicative qui modélise cette situation de proportionnalité : l'image d'un nombre s'obtient en multipliant ce nombre par le coefficient de proportionnalité. Dans ce contexte, l'enfant s'est donc approprié l'aspect fonctionnel de la proportionnalité. Ceci est rendu possible du fait que les coefficients de proportionnalité correspondants sont fixes : alors que le prix à l'unité d'un objet, le taux de sucre d'un mélange varient, une heure, elle, vaut toujours 60 minutes, un mètre toujours 10 dm, etc.

On remarquera cependant que dans les exemples qui viennent d'être évoqués, on convertissait toujours dans l'unité immédiatement supérieure ou inférieure à celle qui avait été donnée. Une question se pose : comment convertir des heures en secondes (et non en minutes) ? des dm en mm (et non en cm) ? des m^2 en cm^2 (et non en dm^2) ?

Apprendre à convertir lorsqu'on « saute » une ou plusieurs unités

Le raisonnement qui permet de comprendre que la conversion des heures en minutes se fait en multipliant par 60 permet tout aussi bien de comprendre que pour convertir des heures en secondes, on multiplie par 3 600 : il suffit de savoir que 1 heure est égale à 3 600 secondes. Alors 2 heures = (3 600 + 3 600) secondes, etc. et, de manière générale, n heures = (3 600 \times n) secondes. Il en serait évidemment de même pour convertir des dm en mm (il faut savoir que 1 dm = 100 mm) ou des m^2 en cm^2 (il faut savoir que 1 $\text{m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$). Aussi convient-il, pour chacun des systèmes de mesure précédents, que l'élève apprenne que dans le système en question deux unités successives sont dans un rapport 60 (respectivement 10, 100), que lorsqu'on « saute une unité », ce rapport est de 3 600 = 60 \times 60 (respectivement 100 = 10 \times 10, 10 000 = 100 \times 100). Dans le cas des longueurs, il est même possible de prolonger ce raisonnement : lorsqu'on « saute deux unités » le rapport est de 1 000 = 10 \times 10 \times 10.

La mémorisation de ces relations se trouve facilitée, pour les aires par exemple, par des images telles que celle d'un carré de 1 dm^2 qu'on a commencé à quadriller en carrés de 1 cm^2 , qui eux-mêmes ont commencé à être quadrillés en carrés de 1 mm^2 (cf. séquence 53). Elle se trouve aussi facilitée lorsqu'on met à la disposition des élèves des diagrammes qui explicitent la structure du système d'unités de mesure, comme celui qui, pour les aires, figure dans le *J'ai appris* de la séquence 53.



Remarquons enfin que l'enfant qui, pour convertir en secondes une durée exprimée en heures la multiplie par 3 600 (ou qui, pour convertir en dm une mesure exprimée en mm la divise par 100, etc.) parce que 3 600 = 60 \times 60 (ou 100 = 10 \times 10), manie la proportionnalité à un niveau expert. Et ceci non seulement parce qu'il utilise d'emblée la relation multiplicative qui modélise cette situation de proportionnalité (si 1 h = 3 600 secondes, alors, de manière générale, n heures = 3 600 \times n secondes), mais de plus parce qu'il coordonne deux situations de proportionnalité : celle correspondant à la conversion des heures en minutes et celle correspondant à la conversion des minutes en secondes. En fait, nous allons voir que les élèves sont en train d'apprendre une nouvelle multiplication : celle des coefficients de proportionnalité.

Développer l'intuition des unités de mesure et, dans le même temps, développer des connaissances mathématiques de haut niveau

Les pratiques pédagogiques qui viennent d'être décrites ont deux caractéristiques essentielles : elles développent l'intuition des diverses unités de mesure et, dans le même temps, elles permettent aux élèves de progresser dans leur compréhension de la multiplication et de la proportionnalité. Elles développent l'intuition des diverses unités de mesure parce que, dès que l'élève a un doute concernant le rapport qu'entretiennent deux de ces unités, il est incité à se reporter à une image ou à un diagramme qui lui rappelle la valeur numérique du rapport en question, mais aussi les raisons d'une telle valeur numérique.

Elles permettent également aux élèves de progresser dans leur compréhension de la multiplication et de la proportionnalité parce qu'elles les initient à des multiplications différentes de celle qu'ils connaissaient déjà : à savoir l'addition réitérée d'une grandeur. En effet, lorsque les élèves ont rencontré la multiplication pour la première fois, en CE1, celle-ci était systématiquement utilisée dans un contexte où un effectif, une longueur, un prix, etc. étaient répétés : n groupes de a objets, n baguettes de a cm, n objets à a euros l'un, etc. Dans tous les cas, donc, une grandeur (effectif, longueur,

prix) était elle-même multipliée. Avec les conversions, ce n'est plus le cas : lorsqu'on change l'unité de mesure d'une longueur, par exemple, celle-ci en tant que grandeur reste inchangée, c'est le nombre qui sert à la mesurer qui se trouve transformé. Cette multiplication est de nature plus abstraite que la multiplication d'une grandeur par un entier naturel. De plus, la multiplication des coefficients de proportionnalité que les élèves sont amenés à utiliser pour changer d'unités, dans les cas où l'on « saute » une ou plusieurs de celles-ci, est une multiplication de nature encore plus abstraite parce que chacun des deux nombres, dans ce cas, est un rapport. Signalons un dernier point : dans le cas de conversions de mesures décimales (convertir 12,48 m en dam, par exemple), la stratégie de conversion qui consiste à s'interroger sur les rapports entre unités (il y a moins de dam que de m, par exemple, 10 fois moins) avant de multiplier ou de diviser par le facteur ainsi isolé (ici, la mesure en dam s'obtient en divisant 12,48 par 10) est une des rares occasions du programme permettant de justifier l'importance de savoir multiplier et diviser un nombre décimal par 10, 100, etc. Cette stratégie de conversion favorise donc également le progrès dans la compréhension des nombres décimaux.

Au total, l'analyse précédente montre comment le projet pédagogique de favoriser chez les élèves une meilleure compréhension des rapports entre unités de mesure et celui de favoriser l'élaboration de connaissances mathématiques relatives à la multiplication, à la proportionnalité et aux nombres décimaux peuvent s'étayer l'un l'autre. Les pratiques pédagogiques correspondantes valent certainement mieux qu'une autre pratique pourtant très répandue : l'usage d'un tableau de conversion.

Une pratique pédagogique « à risques » : enseigner l'usage d'un tableau de conversion

L'éducation mathématique est, évidemment, une éducation au raisonnement. L'objectif n'est pas seulement que les élèves connaissent les règles de manipulation des écritures mathématiques, il s'agit aussi qu'ils comprennent les raisons de ces règles.

Sinon, il existerait un moyen simple d'enseigner les conversions d'unités de mesure : faire apprendre aux élèves l'usage d'un tableau de conversion. S'il faut convertir 743,28 dm en une unité quelconque, on commence par former un tableau dont les colonnes correspondent aux différentes unités : km, hm, dam, m, dm, cm et mm. Il suffit ensuite de respecter la règle simple suivante :

1°) On place d'abord le chiffre des unités (ici 3) dans la colonne correspondant à l'unité indiquée : ici celle des dm.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
				3		

2°) On place les autres chiffres en mettant un chiffre par colonne et en respectant l'ordre 7 4 3 2 8

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		7	4	3	2	8

3°) Il est alors facile d'obtenir la mesure correspondant à une unité quelconque (en m, par exemple) : c'est le nouveau nombre à virgule obtenu en plaçant la virgule juste à droite du chiffre qui est dans colonne de la nouvelle unité (ici 4).

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		7	4,	3	2	8

Dans le cas de notre exemple, la mesure cherchée est 74,328 m. On remarquera qu'une telle règle permet à un élève d'obtenir la solution, même quand il ne sait pas que 1 m c'est 10 dm ; elle lui permettrait d'effectuer la conversion $743,28 \text{ dm} = 7,4328 \text{ dam}$ quand bien même il ne saurait pas que $1 \text{ dam} = 100 \text{ dm}$, etc. Une telle règle permet aux élèves de réussir sans avoir développé une quelconque intuition des unités en jeu.

Par ailleurs, cette règle ne convient pas pour les aires : elle doit être adaptée en stipulant qu'il faut alors écrire deux chiffres par colonne. L'oubli de cette nouvelle règle est souvent massif. L'explication est simple : même quand l'enseignant a essayé de justifier pourquoi il faut écrire deux chiffres par colonne dans le cas des aires, de nombreux élèves ne s'intéressent guère à ce moment de classe parce qu'ils pressentent que les raisons qui sont données ne sont pas cruciales pour réussir les exercices d'application qui vont suivre. Malheureusement, et c'est un phénomène bien connu, l'accumulation de règles dont on n'a pas compris les raisons provoque l'oubli. L'enseignement précoce de telles règles est donc une pratique pédagogique à risques.

Dans *J'apprends les maths CM2*, nous n'enseignons l'usage d'un tableau de conversion qu'en toute fin d'année, juste avant l'entrée au collège (séquence 111). Auparavant, les pratiques pédagogiques décrites précédemment sont mises en œuvre : elles développent mieux l'intuition des différentes unités et, en prime, elles permettent aux élèves de progresser dans leurs connaissances de la multiplication, de la proportionnalité et des décimaux.

Ne conviendrait-il pas mieux d'abandonner à l'école élémentaire l'enseignement de l'usage d'un tableau de conversion ? Lorsqu'on consulte les manuels de mathématiques de 6^e de collège, on s'aperçoit qu'une seule leçon est consacrée aux conversions d'unités de mesure et qu'elle consiste... en l'enseignement de l'usage d'un tableau de conversion ! Dans ces conditions, il est sûrement préférable de faire cette leçon en fin d'école élémentaire parce que l'enseignant a alors la possibilité de tisser des liens entre les règles correspondant à l'usage des tableaux de conversion et tout ce que les élèves ont appris auparavant et qui a développé chez eux une bonne intuition des différentes unités de mesure.

Le double statut du retour à l'unité

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré que l'enfant peut être expert dans l'usage de la proportionnalité dans un domaine et novice dans d'autres, et qu'il y a un domaine où il est particulièrement intéressant de développer l'expertise des élèves : celui des conversions d'unités de mesure. Avant de résumer les choix de *J'apprends les*

maths CM2, et de les situer au sein d'une sorte d'histoire des pratiques pédagogiques autour de la proportionnalité, il convient d'analyser une procédure longtemps appelée « règle de trois », et que nous préférons désigner ici en parlant du « retour à l'unité » ou de la « recherche de la valeur constante à l'unité ».

Le retour à l'unité est une procédure proche d'une résolution par l'action

Montrons-le dans le cas d'un problème où, avec 7 l d'eau, on veut former un mélange qui a la même saveur sucrée qu'un autre qui contient 3 l d'eau et 15 g de sucre. La résolution par recherche de la valeur à l'unité s'interprète facilement en termes d'actions, car le début de la procédure : « si 3 l d'eau contiennent 15 g de sucre, 1 l d'eau contient... » correspond au fractionnement d'un échantillon de 3 litres d'eau et 15 g de sucre en 3 échantillons de 1 litre ayant chacun la même composition, et, de manière évidente, on obtient un tel échantillon en mettant 5 g de sucre dans 1 litre. La solution s'obtient ensuite en imaginant 7 échantillons ainsi formés (il y a 7×5 g de sucre en tout).

On remarquera cependant que lorsqu'on connaît la masse de sucre correspondant à 3 l et qu'on cherche celle correspondant à une quantité d'eau plus grande (7 l), chercher la masse de sucre qui correspond à une quantité plus petite (1 l) constitue un détour par rapport à la résolution par l'action la plus naturelle. Dans notre exemple, il est plus naturel en effet de chercher la masse de sucre nécessaire pour 6 l (30 g de sucre), parce que alors on s'approche de la quantité d'eau voulue. C'est vraisemblablement à ce moment que, « coincés », de nombreux élèves sont susceptibles de penser à chercher celle correspondant à 1 litre d'eau. En bref, la recherche de la valeur à l'unité est parfois une procédure moins naturelle que d'autres, mais dans tous les cas elle s'interprète facilement en terme d'action et, pour peu qu'on aide les débutants à l'évoquer, ils la comprennent facilement.

Le retour à l'unité est une procédure utilisée au sein de la résolution experte

Considérons maintenant la stratégie qui consiste à poser d'emblée que, de manière générale, dans ce type de situation : masse de sucre pour n litres = $n \times$ taux de sucre.

Cette stratégie conduit également à chercher la valeur constante à l'unité (dans notre exemple : 15 divisé par 3) puisque celle-ci n'est autre que le taux de sucre. Il convient cependant d'insister sur les différences entre les deux types de stratégie. Dans la résolution experte, la relation multiplicative n'apparaît plus en fin de procédure comme le résultat d'un raisonnement : elle est posée d'emblée comme modèle mathématique de la situation. La relation multiplicative donne alors le plan de la stratégie et c'est dans un deuxième temps seulement qu'on est alors amené à calculer le coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire la masse de sucre correspondant à 1 litre, soit 5 g/l.

Le double statut de la stratégie de retour à l'unité (facilement interprétable en terme de résolution par l'action, d'une part, et insérée au sein de la résolution experte, de l'autre) explique

le privilège que les pédagogues ont longtemps accordé à cette stratégie.

L'évolution des choix pédagogiques concernant la proportionnalité

L'enseignement de la proportionnalité a beaucoup évolué depuis la création de l'école de la République. Une époque a été charnière dans cette évolution : celle de la réforme de 1970, dite des « mathématiques modernes ».

Avant 1970

La résolution des problèmes de proportionnalité par recherche de la valeur à l'unité (à l'époque on disait : par la « règle de trois ») était systématiquement enseignée à l'école élémentaire. Ce choix pédagogique avait deux caractéristiques essentielles :

1°) La recherche de la valeur à l'unité y apparaissait comme la seule manière possible de résoudre un problème de proportionnalité. Confrontés à la recherche du prix de 8 objets sachant que 4 de ces objets coûtent 5,60 €, les élèves devaient le plus souvent respecter le rituel de la règle de trois : si 4 objets coûtent 5,60 €, 1 objet coûte 4 fois moins, etc. Or, dans ce cas, il suffit de doubler le prix de 4 objets pour obtenir celui de 8 ! à cette époque, comme les pédagogues pensaient généralement que l'important est que les élèves exercent la « règle de trois », soit ils exigeaient l'usage de cette règle dans ce type de cas alors qu'elle n'est pas la stratégie la plus appropriée, soit ils ne proposaient tout simplement pas ce type de cas !

Nous avons précédemment précisé l'intérêt pédagogique de la stratégie de retour à l'unité : elle est facilement interprétable en terme de résolution par l'action et, par généralisation, elle peut conduire à la stratégie experte. Mais l'appellation « règle de trois » est en elle-même révélatrice du fait qu'à l'époque l'accent était moins mis sur l'interprétation de cette stratégie que sur son automatisation. Cette règle, en fait, apparaissait dans les manuels comme la 5^e règle, après celles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, et ce qu'on appelait ainsi « règle », pour chacune de ces opérations, n'était autre que leur technique opératoire, c'est-à-dire, à cette époque, un algorithme qu'il importait peu de réfléchir.

2°) De même, la plupart du temps, lorsqu'on étudiait en classe la relation entre un nombre d'objets achetés et le prix total de l'achat, ou encore la relation entre un nombre de baguettes juxtaposées et la longueur totale de ces baguettes, etc., la situation de proportionnalité était la seule qui était abordée. On n'abordait pas par exemple les situations d'achat quand la valeur à l'unité dépend du nombre d'unités achetées (la $n^{\text{ième}}$ unité gratuite, par exemple).

Du coup, il suffisait de proposer un énoncé dont la forme rappelle celle des énoncés précédents pour que les élèves croient reconnaître un « problème de règle de trois » et utilisent celle-ci indument. En bref, on pouvait reprocher à la pédagogie d'avant 1970 d'enseigner la « règle de trois » plutôt que la proportionnalité.

La réforme de 1970 et les tendances lui ayant succédé

La réforme de 70 a recentré l'enseignement sur celui de la proportionnalité, mais elle l'a fait en privilégiant dès l'école primaire l'enseignement des outils formels qui, dans la suite de la scolarité des élèves, leur permettront de traiter les situations relevant de la proportionnalité : c'est l'époque où la notion de fonction numérique apparaît au programme, où l'on enseigne les propriétés formelles des « tableaux de proportionnalité », etc.

Le formalisme de cet enseignement a évidemment été critiqué et, entre 1980 et 2008 (date de publication des avant-derniers programmes), une autre tendance forte a émergé : la tentation d'une approche constructiviste radicale de la proportionnalité à l'école élémentaire. Dans les textes officiels de cette période, en effet, l'accent est fortement mis sur les procédures de résolution dont nous avons dit qu'elles sont proches d'une résolution par l'action, celles que des enfants sont susceptibles d'utiliser sans être allés à l'école. La méfiance vis-à-vis d'un retour aux pratiques pédagogiques anciennes est telle qu'on recommande rarement l'enseignement de la stratégie de retour à l'unité pour comparer diverses situations d'achat : *qui a payé le plus cher ?*, par exemple.

Un phénomène révélateur de cette tendance forte à ne plus enseigner la proportionnalité à l'école primaire entre 1980 et 2008 est le peu d'intérêt manifesté par les textes officiels de cette période vis-à-vis de l'enseignement des conversions d'unités de mesure. Au sein d'une des commissions qui, ces dernières années, réfléchissait alors sur le *curriculum* de l'école élémentaire, il a même été question de renoncer à l'enseignement des conversions d'unités d'aire ! Ce thème des conversions n'était pratiquement pas étudié non plus dans les ouvrages qui servaient le plus souvent en formation initiale des maîtres. *A fortiori*, il n'était pas étudié dans ces ouvrages en relation avec la problématique de l'enseignement de la proportionnalité.

Les programmes de 2008 et 2015

Ils marquent la réhabilitation de l'enseignement de la stratégie de retour à l'unité. Le texte de ressources publié en 2016 intitulé « Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 », par exemple, accorde autant d'importance à cette stratégie qu'à celles qu'il convient de mettre en œuvre dans des situations où, par exemple, sachant le prix de 3 objets et de 10 objets, on cherche le prix de 6 (9, 12...) objets ou 20 (30, 40...) objets, ou bien encore le prix de 13 objets. Bref, la primauté est accordée à l'interprétation de la situation. Ainsi, les choix de *J'apprends les maths* apparaissent-ils cohérents avec ceux des programmes 2015. Résumons-les.

Les choix de *J'apprends les maths CM2*

En premier lieu, nous récusons toute approche constructiviste radicale de la proportionnalité à l'école élémentaire, approche dont on peut affirmer qu'elle revient à un abandon de responsabilité de la part de l'école. Il est clair en effet que dans certains domaines au moins (celui des ventes avec prix constant à l'unité, par exemple), les élèves peuvent s'approcher de

l'expertise. Il est tout aussi clair que la confrontation de leurs savoir-faire dans ces domaines avec ceux qui relèvent d'autres domaines, et où ils sont loin d'être experts, est source de progrès. Mais un tel progrès n'est possible que si les élèves deviennent effectivement experts dans certains domaines, c'est-à-dire si l'école n'abandonne pas cette ambition.

Il nous apparaît particulièrement important qu'elle ne l'abandonne pas dans le domaine des conversions d'unités de mesure. C'est en effet un domaine qui permet aux élèves de progresser dans l'appropriation d'une notion mathématique cruciale : celle d'une multiplication plus abstraite que l'addition répétée d'une grandeur, et le progrès y est plus facile que dans d'autres domaines parce qu'il aboutit à des connaissances dont la pertinence sociale est claire : savoir exprimer la mesure d'une même grandeur avec différentes unités.

Nous n'insisterons pas sur les différences entre l'approche traditionnelle, celle d'avant 1970, et la nôtre : confrontation de situations de non-proportionnalité et de situations de proportionnalité, confrontation de l'utilisation de procédures proches d'une résolution par l'action et de procédures qui en sont moins proches (comme le retour à l'unité)... On trouve ces activités dans l'approche proposée ici et non dans celle d'avant 1970. Les différences, tant dans les activités proposées que dans la façon dont il est recommandé aux enseignants de les gérer, sont grandes. Il est clair que, fondamentalement, nos choix pédagogiques et ceux d'avant 1970 divergent.

L'enseignement des fractions et des décimaux au CM2

Rappelons les choix fondamentaux de *J'apprends les maths* concernant l'enseignement des fractions et des décimaux. Le premier, sur lequel nous n'insisterons pas ici, est d'introduire les décimaux comme fractions particulières, celles dont le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc. Ce choix, très fortement recommandé par les Instructions officielles, fait aujourd'hui l'unanimité des chercheurs en didactique.

Un autre choix, en revanche, est aujourd'hui encore spécifique à la collection *J'apprends les maths* : celui d'introduire les fractions en tant que quotient ou, ce qui est une autre façon de s'exprimer, dans leur sens multiplicatif. Rappelons en effet que a/b se lit soit « a divisé par b » (bien qu'il s'agisse d'une division, les didacticiens parlent alors du sens « multiplicatif » de la fraction), soit a $b^{\text{ième}}$ (on parle alors du sens « additif » de la fraction parce que cette désignation renvoie à $1/b + 1/b + 1/b + \dots$ a fois). Choisir d'introduire les fractions dans leur sens quotient, en leur donnant la signification de « résultats d'une nouvelle division qui est différente de la division euclidienne parce qu'elle permet de partager le reste », reste aujourd'hui une spécificité de *J'apprends les maths*.

Les fractions, résultats d'une nouvelle division

Au CM1, lorsque les élèves rencontrent pour la première fois l'écriture $27/4$, par exemple, celle-ci désigne le résultat du

partage de 27 unités sécables (des pizzas, des verres de jus de fruits, mais aussi des mètres, des litres, etc.) en 4 parts égales. Pour obtenir la valeur d'une part avec cette nouvelle division, il suffit évidemment de calculer le quotient entier de 27 par 4 et d'y ajouter le résultat du partage du reste 3 en 4 parts égales. Dès les premières leçons sur les fractions, les élèves apprennent donc à produire des égalités telles que $27/4 = 6 + 3/4$ en s'appuyant sur la signification « division » de la barre de fraction (27 divisé par 4, c'est 6, le quotient de la division euclidienne, plus le reste 3 qui est lui-même divisé par 4), ou encore $4\,729/100 = 47 + 29/100$ (4 729 divisé par 100, c'est 47, le quotient de la division euclidienne, plus le reste 29 qui est lui-même divisé par 100).

Du coup, les élèves apprennent rapidement à lire et comprendre ces égalités de deux façons différentes : celle qui vient d'être rapportée où la barre de fraction se lit « divisé », et celle où a/b se comprend comme a fois $1/b^{\text{ième}}$ et se lit $a/b^{\text{ième}}$. C'est ainsi que $27/4 = 6 + 3/4$ se lit et se comprend non seulement en référence à la division, mais aussi sous la forme : « 27 quarts est égal à 6 plus 3 quarts », et $4\,729/100 = 47 + 29/100$ se lit et se comprend en référence à la division, mais aussi sous la forme : « 4 729 centièmes est égal à 47 plus 29 centièmes ». Les conséquences sont importantes. Concernant les nombres décimaux, cela signifie que les élèves, assez rapidement, savent sans hésitation que 47,29 (qui n'est qu'une autre façon d'écrire $47 + 29/100$) c'est aussi $4\,729/100$, c'est-à-dire à la fois « 4 729 divisé par 100 » et « 4 729 centièmes ». Cela signifie qu'ils savent sans hésitation que 0,29 (qui n'est qu'une autre façon d'écrire $29/100$) c'est aussi « 29 divisé par 100 ». Or, dans une pédagogie ordinaire, plus de 40 % des élèves ne le savent pas à l'entrée en 6^e !

Favoriser l'articulation entre les sens multiplicatif et additif des fractions

Privilégier, lors des premières rencontres avec les fractions, les situations où elles désignent le résultat de divisions est un choix fondamental parce que cette signification des fractions est la moins typique des deux (cf. chapitre 4), et le privilège qui lui est ainsi initialement accordé est, selon nous, le moyen le plus sûr pour que les élèves sachent articuler le sens additif et le sens multiplicatif d'une fraction ($a/b^{\text{ième}}$, c'est aussi a divisé par b). Comme on le verra plus loin, cela a évidemment des conséquences sur la compréhension au CM2 de la « division poussée après la virgule », mais aussi, ce qui est moins intuitif, sur la compréhension de la multiplication d'un décimal par un nombre entier.

Développer l'intuition des fractions en enseignant les équivalences du type $3/4 = 75/100$; $6/10 = 60/100$, etc.

Un autre choix fondamental de la progression de *J'apprends les maths* est de faire en sorte que les élèves sachent immédiatement comparer n'importe quelles fractions dès que leur dénominateur est 2, 4, 10, 100 ou 1 000, qu'ils sachent par exemple comparer immédiatement $3/4$ et $7/10$ parce que cela revient à comparer $75/100$ et $70/100$. Là encore, la stratégie pédagogique choisie consiste à enseigner ce type d'équi-

valence ($3/4 = 75/100$; $7/10 = 70/100$, etc.) en s'appuyant sur des découpages d'un carré unitaire, sans enseigner de règle de réduction au même dénominateur, parce que cela développe mieux l'intuition des fractions correspondantes (cf. séquences 33, 39 et 41).

La division « poussée après la virgule »

Depuis le CM1, les élèves savent qu'il existe deux sortes de divisions, celle où l'on partage le reste et celle où on ne le fait pas. Par ailleurs, s'il s'agit de partager 27 unités sécables en 4, ils savent aussi que $27/4 = 6 + 3/4$; au CM2, ils apprennent de plus à « pousser une division après la virgule » (séquences 80, 81, 83 et 85) : cela se fait simplement du fait que les élèves ont appris à faire une division euclidienne en partageant successivement les centaines, dizaines et unités. Il leur suffit donc, dans la division euclidienne de 27 par 4, de transformer les 3 unités restantes en dixièmes (3 unités, c'est 30 dixièmes) et de poursuivre le scénario de partage en 4 en l'effectuant d'abord avec ces 30 dixièmes puis, éventuellement, avec les centièmes restants, etc. Dans le cas de la division de 27 par 4, cela donne $27/4 = 6,75$.

Résumons : les élèves savaient que $27/4 = 6 + 3/4$ et ils découvrent que la division poussée après la virgule donne $27/4 = 6,75$. Comme ils savent par ailleurs que $3/4 = 75/100$, ils ont la possibilité de comprendre la compatibilité de ces deux résultats. Ce type de moment pédagogique est particulièrement important parce que les élèves ont la possibilité de relier leurs connaissances entre elles, d'en éprouver la cohérence et de mieux les mémoriser parce qu'elles se constituent en réseau. La progression choisie permet de nombreux moments pédagogiques analogues.

La multiplication d'un décimal par un entier

La multiplication de deux nombres à virgule n'est plus au programme de l'école élémentaire ; seule la multiplication d'un nombre décimal et d'un nombre entier l'est.

Remarquons cependant qu'un produit tel que $0,87 \times 29$ peut correspondre à deux types de situations : soit il s'agit de calculer 29 fois 0,87 (par exemple, « quelle est la longueur totale de 29 baguettes de 0,87 pouces mises bout à bout ? »), soit il s'agit de calculer « 0,87 fois 29 ». Or, cette dernière expression est synonyme de « prendre les $87/100$ de 29 » (« une moquette vaut 29 € le mètre. Quel est le prix de 0,87 mètre ? »). Il ne va pas de soi que les deux calculs donnent le même résultat. Il est important que les élèves rencontrent ces deux significations de $0,87 \times 29$ à l'école élémentaire et qu'ils prennent conscience que les deux modes de calcul correspondants sont équivalents. Le maître qui n'enseigne que la signification typique « 29 fois 0,87 » laisse les enfants croire pendant une longue durée que le produit de deux nombres conduit systématiquement à un nombre plus grand (29 fois 0,87 est plus grand que 0,87), alors que « 0,87 fois 29 » est égal à un nombre plus petit que 29 ! Il est important que, dès l'école élémentaire, les élèves sachent que calculer « 0,5 fois un nombre » revient à prendre la moitié de ce nombre. Sinon,

à strictement parler, l'école n'enseigne pas la multiplication d'un décimal par un entier, elle ne fait qu'enseigner l'addition répétée d'un nombre décimal.

Lorsque des élèves ont suivi la progression de *J'apprends les maths*, comprendre l'équivalence des deux modes de calcul du produit d'un entier par un décimal est tout à fait à leur portée. En effet, prendre les $\frac{87}{100}$ de 29, c'est d'abord diviser 29 en 100 parts égales (on obtient donc 0,29) puis prendre 87 de ces parts : on obtient $0,29 \times 87$, c'est-à-dire 87 fois 29 centièmes. Il est facile de comprendre que ce produit est égal à $0,87 \times 29$, c'est-à-dire 29 fois 87 centièmes : leur égalité résulte de la commutativité de la multiplication des entiers (on peut également le comprendre en se référant à la technique en colonnes : dans les deux cas, on est amené à calculer 29×87 et à interpréter le résultat comme un nombre de centièmes : cf. séquence 115).

Mais le raisonnement précédent n'est possible que s'il est évident pour les enfants que 29 divisé par 100 c'est 0,29 (rappelons que dans une pédagogie ordinaire, pour plus de 40 % des élèves ce n'est pas le cas à l'entrée en 6^e, par manque de coordination des sens additif et multiplicatif des fractions !). Le choix fondamental d'introduire les fractions comme résultats de divisions a donc des conséquences importantes tout au long de la progression !

Conclusion

Trois notions ont été traitées dans ce chapitre : la proportionnalité, les conversions d'unités de mesure et les décimaux. Les principaux choix pédagogiques qui ont été exposés ne sont pas seulement une réponse à la question : comment favoriser les progrès des élèves relativement à chacune de ces notions ? Nous avons également essayé de répondre à celle-ci : comment aborder en classe ces différents contenus de manière coordonnée ?

Comme nous l'avons montré, la progression concernant les conversions vise aussi à favoriser le progrès dans l'appropriation de l'aspect fonctionnel de la proportionnalité. De même, la progression concernant les fractions et les décimaux au CM2 vise à préparer les futurs collégiens à un élargissement de leur conception de la proportionnalité, initialement fondée sur la seule itération d'une valeur à l'unité qui est constante. Donner du sens à une expression telle que « 0,87 fois 29 » et prendre conscience que d'un point de vue calculatoire cela ne conduit à aucune contradiction, c'est s'ouvrir à une conception de la proportionnalité où celle-ci renvoie à une fonction : $x \mapsto F(x) = x \times F(1)$ avec x quelconque, entier ou non.

Rémi Brissiaud
 André Ouzoulias
 Pierre Clerc
 François Lelièvre
 Luc Tiennot

Chaque double page de ce guide correspond, en général, à une double page du livre de l'élève.

Pour chaque séquence, les objectifs principaux sont rappelés et précisés, non seulement dans une rubrique *Objectifs*, mais parfois aussi, quand cela aide à l'animation de telle ou telle activité, dans le paragraphe qui lui est consacré (souvent sous le titre *Remarque*).

Pour le reste, l'essentiel du texte décrit comment animer les activités de la séquence, à l'aide du livre, du cahier d'activités ou à partir d'une situation proposée à la classe sans ces deux supports. En effet, assez souvent, au début de la séquence, après la séance de calcul mental quotidien, nous décrivons une activité collective initiale sans le support du livre, mais qui vise les mêmes objectifs que celle qui figure dans celui-ci. Dans ce cas, elle se substitue à l'activité correspondante proposée sur le livre (celle-ci pourra toutefois être utile aux élèves absents ce jour-là).

La progression retenue répartit les apprentissages en 120 séquences, regroupées sur 4 périodes (ce découpage est lié aux contenus mathématiques et non aux périodes de l'année scolaire). Chaque séquence a été conçue de telle façon qu'elle corresponde à l'horaire quotidien de mathématiques.

On trouve, à la fin de chaque période, un bilan sur une ou deux pages constituant l'horaire d'une ou deux séquences. Nous proposons également, au milieu de la deuxième période (sq 46) et de la troisième période (sq 76), un bilan intermédiaire d'une page. Ces bilans ne donnent pas lieu à une présentation dans le guide pédagogique, car les activités concernées ont déjà été pratiquées par les élèves auparavant et ont donc déjà été commentées dans les séquences précédentes.

Dans les quatre pages suivantes, l'enseignant trouvera des conseils généraux pour l'utilisation de *J'apprends les maths CM2*.

L'organisation en 4 périodes

Périodes	Nombres et calculs	Géométrie et mesures	Pages
1	Numération (les grands nombres) ; les 3 opérations (calcul mental et technique écrite) ; la division avec reste : les 2 « gestes mentaux ».	Vocabulaire de base ; les angles, droites et segments perpendiculaires. Conversions de mesures entières de longueur et de durée (1).	14 à 55
2	La division-fraction ; les fractions décimales ; technique de la division avec reste (suite).	Droites et segments parallèles ; les aires ; construction de triangles. Conversions de mesures entières de longueur, de durée (2) et d'aires.	56 à 89
3	Les fractions décimales (écriture décimale ou « à virgule ») ; division par un nombre à 2 chiffres ; quotient décimal ; la moyenne.	Rédiger le plan de construction d'une figure ; les solides. Sens des chiffres dans une mesure décimale (longueurs et aires).	90 à 133
4	La proportionnalité ; produit d'un entier par un décimal ; graphiques.	Symétrie par rapport à une droite ; périmètre et aire du rectangle (suite) ; agrandissement et réduction de figures. Conversions de mesures décimales de contenance et de masse.	134 à 165