J'apprends les maths CE1

Livre du maitre

Sous la direction de

RÉMI BRISSIAUD
Maitre de conférences de psychologie expérimentale

ANDRÉ OUZOULIAS
Professeur agrégé

FLORENCE SUIRE
Professeur des écoles

FRANÇOIS LELIÈVRE
Professeur des écoles

PIERRE CLERC
Instituteur

RETZ
www.editions-retz.com
9 bis, rue Abel Hovelacque
75013 Paris

Sommaire

Une démarche qui avait anticipé les programmes de 2016 3

Chap. 1 **Le nombre et la résolution de problèmes** 4

Chap. 2 **Espace et géométrie ; Grandeurs et mesures** 10

Guide du matériel 16

Guide pédagogique 19

Période rouge (p. 8 à p. 61 folio élève) 20

Période jaune (p. 62 à p. 115 folio élève) 74

Période verte (p. 116 à p. 157 folio élève) 126

Planches de matériel à reproduire 164

Bilans 168

Cet ouvrage est conforme à la nouvelle orthographe www.orthographe-recommandee.info

Cet ouvrage suit l'orthographe recommandée par les rectifications de 1990 et les programmes scolaires.

Voir le site http://www.orthographe-recommandee.info et son miniguide d'information.

MIXTE
Papier issu de sources responsables
FSC® C022030

Illustrations : Guillaume Trannoy
Photos : Shutterstock
Corrections : Gérard Tassi
Maquette : Anne-Danielle Naname
Mise en page : STDI

© Retz, 2016

ISBN : 978-2-7256-3478-4

N° de projet : 10219632 - Dépôt légal : mai 2016
Achevé d'imprimer en France en mai 2016 sur les presses de l'imprimerie Jouve

Une démarche qui avait anticipé les programmes 2016

Depuis l'édition précédente de *J'apprends les maths*, de nouveaux programmes pour la rentrée 2016 ont été publiés et une Conférence de consensus, qui s'est tenue en 2015, a émis des recommandations concernant les apprentissages numériques à l'école élémentaire.

Les choix didactiques de *J'apprends les maths* s'en sont trouvés confortés :

• On lit dans le programme 2016 qu'« *au CE1, un temps conséquent est consacré à la reprise de l'étude des nombres jusqu'à 100, notamment pour leur désignation orale et pour les stratégies de calcul mental ou écrit. Parallèlement, l'étude de la numération décimale écrite (centaine, dizaines, unités simples) est étendue par paliers, jusqu'à 200, puis 600 et éventuellement 1000* ». Or, dans *J'apprends les maths CE1*, l'année est découpée en trois périodes : la 1re où l'accent est mis sur le calcul mental jusqu'à 100, la 2e où les élèves développent leurs compétences numériques dans le domaine des 200 premiers nombres (cela permet de travailler sur une longue durée le fait que 130, par exemple, c'est 13 dizaines) et la 3e où ils étendent ces compétences jusqu'à 1 000 (il faut savoir que 630, c'est 63 dizaines, ce qui n'a rien d'évident !).

• La conférence de consensus souligne que « *le calcul mental et le calcul en ligne doivent être privilégiés par rapport au calcul posé* » et qu'ils « *devraient être travaillés avant le calcul posé* ». Or, ce choix est celui de *J'apprends les maths CE1* depuis sa 1re édition.

• Concernant la résolution de problèmes, le programme de 2016 recommande de demander aux élèves de « *prévoir des résultats d'actions portant sur des collections ou des grandeurs* ». *J'apprends les maths* a constamment utilisé et perfectionné ce type d'activités, essentiel pour que les élèves donnent du sens à leurs apprentissages numériques. Sa forme la plus achevée est sans conteste celle que nous avons appelée **la simulation mentale d'une action que l'enseignant réalise de manière masquée** : une correspondance 1 à 1 entre deux collections ou un passage de la dizaine, par exemple (voir le chapitre 1).

• On connait mieux aujourd'hui les problèmes arithmétiques que les enfants apprendraient à résoudre s'ils n'allaient pas à l'école (ils le feraient à l'aide de leur connaissance quotidienne de la signification des verbes ajouter, retirer, partager, de leur connaissance de la signification du mot fois, de l'expression de plus, etc.). Avec *J'apprends les maths*, l'enseignant commence par consolider les connaissances quotidiennes des élèves (la réussite des plus fragiles en dépend) ; il fait ensuite de la rencontre avec les **propriétés conceptuelles** telles que la commutativité un évènement dans leur vie d'écolier. C'est l'un des moyens les plus sûrs pour que les élèves comprennent les opérations arithmétiques. Cette démarche a été exposée lors de la Conférence de consensus.

• Concernant les opérations arithmétiques, **la soustraction est d'emblée associée à la comparaison** de deux nombres : 9 – 6, c'est « ce qui est différent » lorsqu'on imagine deux collections de 9 et 6 points et lorsqu'on relie 1 à 1 dans sa tête « ce qui est pareil » (il faut imaginer 9 et 6 avec le repère 5 !). Là encore, les raisons d'un tel choix ont été présentées lors de la Conférence de consensus (voir le chapitre 1).

• Par ailleurs, le programme de 2016 souligne l'importance du travail sur les grandeurs et notamment, au CE1, celui sur les longueurs et les prix. On y lit que : « *Les opérations sur les grandeurs sont menées en lien avec l'avancée des opérations sur les nombres, de la connaissance des unités et des relations entre elles.* » Or, dès sa 1re édition, *J'apprends les maths* avait fait ce choix. Ainsi, de même que les enfants apprennent que 16 dizaines et 4 unités, c'est 164, ils apprennent que 16 traits de 10 cm mis bout à bout et encore 4 cm, c'est 164 cm, que 16 pièces de 10 centimes et encore 4 centimes, c'est 164 centimes, etc.

L'édition 2016 : quelles nouveautés ?

Trois nouveautés essentiellement : un travail renforcé sur les égalités lacunaires (sq 84) et sur l'expression des nombres en unités de numération (sq 89) ; et, surtout, le fait que *J'apprends les maths CE1* renoue avec l'enseignement de la technique de soustraction dite « naturelle », celle où l'on dégroupe des dizaines ou des centaines pour pouvoir effectuer les retraits (sq 58).

Rémi Brissiaud

Chapitre 1

Le nombre et la résolution de problèmes dans *J'apprends les maths CE1 :* les idées forces

PLAN DU CHAPITRE

- Les compétences en calcul mental : un passeport pour la réussite
- Calcul mental, compréhension des opérations et résolution de problèmes
- Apprendre le calcul mental dans des situations d'anticipation
- Apprendre à calculer en simulant mentalement l'action du maitre
- Enseigner la multiplication
- Enseigner la soustraction
- Mémoriser les relations numériques élémentaires
- Préparer l'enseignement de la division
- Enseigner la résolution de problèmes : les Problèmes pour apprendre à chercher (PAC)
- L'organisation en 3 périodes pour favoriser la compréhension de l'écriture des nombres

Les compétences en calcul mental : un passeport pour la réussite

Dans *J'apprends les maths*, chaque séquence de mathématiques commence par une ou deux activités de calcul mental. Il s'agit en effet d'un savoir-faire fondamental parce qu'il est bien établi aujourd'hui qu'avoir de bonnes compétences en calcul mental est une sorte de passeport pour une scolarité réussie en mathématiques. Trois sortes de recherches ont conduit à cette conclusion :

– L'étude des élèves en difficulté grave et durable : une extrême faiblesse en calcul mental est une caractéristique pratiquement commune à tous ces élèves. Ils n'accèdent même pas aux relations additives élémentaires (8 + 6, par exemple) parce qu'ils restent longtemps prisonniers de procédures de comptage rudimentaires[1].

– Une recherche de sociologues[2] qui, à partir des évaluations CE2 et 6e des mêmes élèves, ont étudié quelles compétences particulières en CE2 permettent de pronostiquer un niveau général élevé en mathématiques en 6e. Les résultats sont clairs : les compétences qui permettent le meilleur pronostic relèvent du calcul mental.

– L'étude des liens qu'entretiennent entre elles les compétences en calcul mental, d'une part, la compréhension des opérations arithmétiques et la résolution de problèmes, de l'autre.

Calcul mental, compréhension des opérations et résolution de problèmes

Des enfants brésiliens qui n'étaient jamais allés à l'école (des enfants de la rue) se sont vu proposer le problème suivant[3] : *Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?* Le taux de réussite est de 75% alors que ces enfants de 10 ans environ n'avaient jamais entendu parler de multiplication. Ainsi, nul besoin d'être allé à l'école pour résoudre ce problème. Mais le problème : *Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?*, lorsqu'il est proposé aux mêmes enfants, conduit à… 0% de réussite !

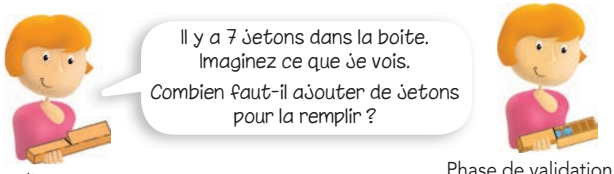
Savoir calculer mentalement *3 fois 50* ne suffit donc pas pour accéder à la solution du second problème, il faut de plus savoir que *50 fois 3* et *3 fois 50* sont le même nombre (commutativité de la multiplication). C'est à l'école que les élèves s'approprient ce type de propriétés que les psychologues du développement qualifient de *conceptuelles*.

1. Voir par exemple Geary, D. C. (2005), « Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles » in M.-P. Noël (éd.), *La Dyscalculie*, Marseille, Solal.
2. Un résumé de l'étude se trouve dans Suchaut, B. (2007), *Apprentissages des élèves à l'école élémentaire : les compétences essentielles à la réussite scolaire* (collab. S. Morlaix). Note de l'IRÉDU, 07/1.
3. Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S. & Nicéas, L. (1998), « Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers », *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

Ce phénomène (réussite quasi nulle à un problème très proche d'un autre qui, lui, est bien réussi) s'observe avec toutes les opérations : multiplication, soustraction, division[4]. La compétence à résoudre mentalement ces problèmes dépend de manière cruciale de la *compréhension* des opérations arithmétiques. Cependant, si cette compétence en calcul mental dépend de la compréhension des opérations, elle la révèle aussi et la développer doit évidemment être un objectif prioritaire des pédagogues.

Apprendre le calcul mental dans des situations d'anticipation

Donnons d'abord un exemple de situation d'anticipation :



Phase d'anticipation.

Phase de validation : l'enseignant bascule la boite.

Dans ce cas, il s'agit d'anticiper le nombre de cases vides d'un cadre matériel de 10 cases lorsque 7 d'entre elles sont remplies. Ou encore : il s'agit d'anticiper le nombre de jetons qu'il faudrait ajouter pour qu'il y en ait 10.

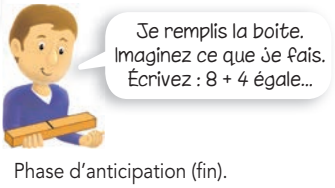
Les élèves prennent conscience de la différence entre ce type de tâche et la devinette : contrairement à un élève qui devine, l'élève qui raisonne correctement peut réussir systématiquement. Par ailleurs, la situation est autocorrective : comme l'enjeu du raisonnement arithmétique est d'anticiper le résultat d'actions avant qu'elles ne soient effectivement réalisées, il suffit de procéder à ces actions (ici, ajouter 3 jetons et observer que la boite est pleine) pour valider ou non l'anticipation.

C'est ainsi que **la résolution de problèmes prend du sens** pour les élèves. Il est important que les situations d'anticipation restent privilégiées au CE1 parce qu'à ce niveau de la scolarité, les enfants construisent encore leur rapport à l'activité mathématique.

Apprendre à calculer en simulant mentalement l'action du maitre

Mais les situations d'anticipation utilisées dans *J'apprends les maths CE1* favorisent l'apprentissage du calcul mental pour une autre raison, plus fondamentale encore. Considérons, par exemple, la situation utilisée pour enseigner le « passage de la dizaine » : 8 + 4 = (8 + 2) + 2.

Phase d'anticipation (début).



Phase d'anticipation (fin).

Les élèves sont conduits à simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de façon masquée. Or les recherches en neuropsychologie[5] montrent que l'apprentissage repose grandement sur ce type de processus mentaux. Au-delà des travaux scientifiques, on en comprend bien les raisons en considérant la phase de validation :

Phase de validation : l'enseignant reconstitue la situation initiale tout en basculant la boite et en ouvrant la main. Il peut ensuite réaliser l'action de manière visible.

Lorsque les élèves sont seulement confrontés à une situation comme celle qui est utilisée ici pour la validation, c'est-à-dire une situation où le complément à 8 est visible, où la collection ajoutée est visible et donc facilement décomposable, la plupart d'entre eux se trouvent en grande difficulté dès que le matériel n'est plus présent.

Simuler mentalement l'action que l'enseignant a réalisée de manière masquée oblige à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure et à enchainer ces étapes : devenir capable de le faire rend autonome dans la mise en œuvre de cette procédure.

Enseigner la multiplication

D'un point de vue pédagogique, que faut-il conclure des recherches montrant que, sans aller à l'école, les élèves apprendraient à trouver le prix de 3 objets à 50 € l'un mais pas celui de 50 objets à 3 € l'un ? Ces résultats soulignent que la multiplication est bien plus qu'une simple addition répétée et qu'il est de la responsabilité des professeurs d'école d'enseigner la commutativité. Il serait dangereux de faire croire aux élèves que les hommes ont inventé le signe « x » dans le seul but de disposer d'une abréviation sténographique pour l'addition répétée (pour pouvoir écrire 3 x 50 plutôt que 50 + 50 + 50). Il convient certainement que, dès leur première rencontre avec cette opération, les élèves soient confrontés avec de « grandes additions répétées » (3 + 3 + 3 + 3 + … 50 fois, par ex.) et qu'ils comprennent que les hommes ont inventé le signe « x » comme symbole de la commutativité. S'il faut chercher 50 fois 3 (le prix de 50 objets à 3 e l'un), on écrit 50 x 3 par ex., mais on calcule ensuite 3 fois 50.

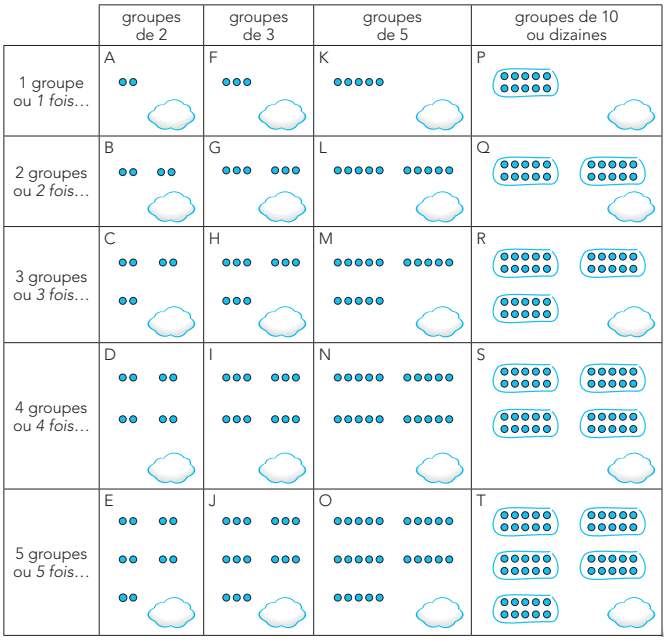
Il faut insister ici sur l'importance des choix pédagogiques concernant la séquence où s'effectue la première rencontre des élèves avec une opération arithmétique. En effet, lorsque l'enseignant annonce aux élèves que dans la séquence de mathématiques du jour, ils vont apprendre la multiplication, ils vont apprendre le signe de cette opération et à quoi elle sert, il bénéficie d'une attention plus soutenue de leur part. L'introduction d'une nouvelle opération est un évènement dans la vie d'un écolier qui crée de l'émotion et favorise l'apprentissage et la mémorisation. Le choix de *J'apprends les maths* est, lors de ces premières rencontres, de favoriser

4. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010), « Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First framework ». *Developmental Science*, 13(1), 92-107.

5. Voir par exemple Rizzolatti, G. & Sinigaglia, C. (2008), *Les Neurones miroirs*, Paris, Odile Jacob.

l'acquisition des propriétés cruciales des opérations, que les psychologues appellent « conceptuelles » parce qu'elles sont la raison d'être de ces opérations et parce que les élèves n'y accèderaient pas sans aller à l'école.
En revanche, il est essentiel que les enfants cherchent les résultats d'additions répétées élémentaires bien avant leur rencontre avec la multiplication. Il y a deux grandes façons d'exprimer ces additions répétées avec les mots du langage quotidien, sans utiliser le signe « x » :
– soit on utilise le mot fois : 3 fois 2, 4 fois 3, 4 fois 5…
– soit on parle de 3 groupes de 2 objets, 4 groupes de 3 objets de façon générale et, de façon plus particulière, de 3 paquets de 2 bonbons, de 4 équipes de 3 enfants…

Ces différentes façons de s'exprimer ont toutes leur intérêt et, avec cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CE1*, les élèves les utilisent toutes dès le début de l'année. Considérons par exemple cette activité proposée sq 16 :



Après avoir appris à décrire le contenu de chaque case sous la forme *a* groupes de *b* ou *a* fois *b*, les élèves doivent indiquer dans les nuages le nombre total de points de la case correspondante. Le signe « x » ne sera introduit que dans la sq 67, lorsque les élèves seront prêts à comprendre la commutativité de cette opération, c'est-à-dire le fait que 10 fois 2, par exemple, peut se calculer comme 2 fois 10, mais, dès cette séquence, ils apprennent combien il y a de points dans 2 groupes de 10 points, dans 4 groupes de 5 points, etc.

De plus, on les interroge dès cette même sq 16 sur le nombre de fleurs dans 2 bouquets de 10 fleurs, dans 4 paquets de 5 gâteaux, etc. Il suffit en effet d'imaginer que les points sont respectivement des fleurs ou des gâteaux pour obtenir la réponse. Dès le lendemain (sq 16), les élèves seront également interrogés sur la valeur totale de 2 billets de 10 €, de 4 billets de 5 €, etc. Pour connaitre la réponse, il suffit en effet de savoir que 2 billets de 10 € ont la même valeur que 2 groupes de 10 pièces de 1 €, que 4 billets de 5 € ont la même valeur que 4 groupes de 5 pièces de 1 €, etc.

Trois mois plus tard environ (sq 67), quand les élèves rencontrent le signe « x », ils savent calculer des additions répétées élémentaires, ils connaissent déjà les plus simples des relations numériques correspondantes, ils comprennent le lexique (fois, groupes…) permettant de décrire les additions répétées, ils savent utiliser ces relations numériques pour résoudre des problèmes variés (paquets de gâteaux, bouquets de fleurs, équipes d'enfants, pièces et billets…), il ne leur reste plus qu'à apprendre la commutativité. Il est évidemment plus simple d'apprendre que 10 fois 2 est égal à 2 fois 10 lorsqu'on comprend bien chacune de ces expressions que lorsque ce n'est pas le cas.

Avec l'apprentissage de la multiplication, les élèves augmentent de manière considérable leur stock de relations numériques connues. Depuis la sq 16, en effet, ils savent déterminer combien il y a d'unités dans 3 groupes de 2 unités ou 3 fois 2 par exemple, mais ils ne savent pas le faire pour 7, 8, 9 ou 10 fois 2 unités (ou groupes de 2). C'est ici qu'ils apprennent à le faire en écrivant, dans le cas de 7 groupes, la multiplication 7 x 2 (ou, indifféremment, 2 x 7) et en calculant 2 fois 7 plutôt que 7 fois 2. En utilisant la commutativité de la multiplication, ils peuvent ainsi résoudre de nouveaux problèmes à partir des connaissances numériques acquises depuis le début de l'année. Ils peuvent désormais calculer le nombre total d'enfants dans 7 équipes de 2 enfants ou la valeur totale de 7 pièces de 2 € (7 x 2) sans être obligés de compter de 2 en 2, ils peuvent déterminer le nombre total de fleurs dans 10 bouquets de 8 fleurs (10 x 8) sans être obligés de compter de 8 en 8 (on calcule 8 fois 10). Comme l'usage de l'addition répétée a entre-temps été étendu au cas de segments de même longueur (sq 61), ils peuvent même déterminer la longueur totale de 5 segments de 4 cm mis bout à bout (5 x 4) sans être obligés de compter de 4 en 4 (on calcule 4 fois 5).

En résumé : les élèves apprennent dès le début de l'année à résoudre des problèmes en faisant des additions répétées mais la découverte du signe « x » et de la commutativité de la multiplication dont il est le symbole, leur permet d'élargir de manière considérable le champ des problèmes qu'ils savent résoudre à l'aide d'une addition répétée. Le « saut qualitatif » correspondant est tel que l'intérêt d'avoir appris la multiplication apparait clairement aux élèves, et qu'ils s'en trouveront d'autant plus motivés à apprendre les tables et les techniques mentales et écrites avec de plus grands nombres (travaillées respectivement avec ce qu'on appelle ici la « multiplication en lignes » et la « multiplication en colonnes »).

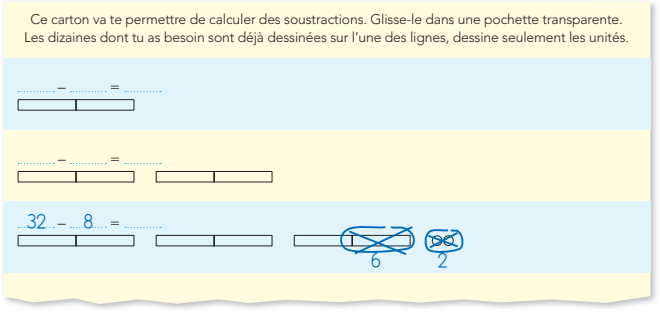
Enseigner la soustraction

De même qu'il importe que les élèves sachent que la multiplication n'est pas une simple addition répétée, il est fondamental qu'ils sachent que la soustraction permet de résoudre bien d'autres types de problèmes que ceux où l'on perd, où l'on retire…, c'est-à-dire ceux qui parlent

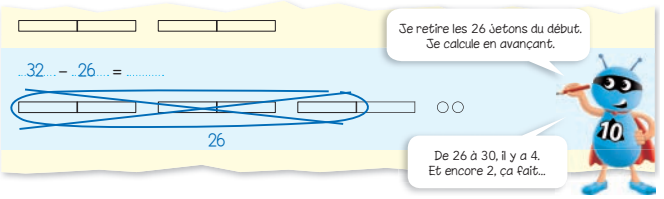
d'une quantité qui diminue. Le choix, dans cette nouvelle édition de *J'apprends les maths CE1*, d'enseigner d'emblée la soustraction dans des situations de comparaison est ainsi tout aussi fondamental. Il ne fait guère de doute que les généralisations se font plus facilement des situations de comparaison vers les situations de retrait que dans le sens opposé.

Rappelons de plus que la progression de *J'apprends les maths* concernant la soustraction est originale du fait que, dès le CP et tout au long du CE1, les élèves apprennent différentes stratégies de calcul mental. Les adultes ne calculent pas de la même manière 102 – 6 et 102 – 94. Pour déterminer 102 – 6, ils procèdent généralement par retraits successifs, c'est-à-dire en reculant sur leur file numérique mentale ; ils font : (102 – 2) – 4 = 96. En revanche, pour calculer 102 – 94, ils calculent par compléments successifs, c'est-à-dire en avançant sur leur file numérique mentale : à partir de 94, il faut 6 pour aller à 100 ; et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout.

Dès le CP, les élèves ont appris que 9 – 2 ne se calcule pas de la même manière que 9 – 7 et que 12 – 3 ne se calcule pas de la même manière que 12 – 9. Ils continuent au CE1 à s'approprier ces deux grandes stratégies de calcul mental d'une soustraction dans le cas de nombres plus grands : en reculant lorsque le nombre retiré est petit (32 – 8, par ex.) et en avançant lorsqu'il est grand (32 – 26, par ex.).
Ainsi, s'il s'agit de calculer 32 – 8, par exemple, les élèves utilisent le « carton de files de boites » qui figure à la fin de leur fichier pour trouver le résultat par retraits successifs.



Ils écrivent la soustraction dans la partie de l'image où 3 boites sont déjà dessinées l'une à côté de l'autre et dessinent 2 points de façon à représenter 32 ; ils effectuent alors le retrait de 8 sous la forme 32 – 2 – 6 (*cf.* figure). Comme dans ce type de représentation les boites sont fermées, les élèves doivent effectuer la décomposition de 8 en 2 et encore… 6. Cette décomposition est l'une des principales difficultés de cette façon de calculer et il est fondamental qu'elle reste à la charge des élèves (lorsque les boites étaient ouvertes, de nombreux élèves comptaient 1 à 1 plutôt que de calculer).
En revanche, s'il s'agit de calculer 32 – 26, par ex., la stratégie consistant à barrer les « 26 dernières unités » reste évidemment possible mais elle est bien plus couteuse que celle qui consiste à barrer les « 26 premières unités », ce qui correspond à un calcul « en avançant ».



De façon générale, dans les cas où on retire un grand nombre, notamment ceux où l'on retire « presque tout », cette seconde façon de calculer apparait clairement comme plus économique.

Mémoriser les relations numériques élémentaires

Remarquons tout d'abord que les additions et les soustractions élémentaires ne se mémorisent pas comme les multiplications élémentaires. Lorsqu'un adulte entend « 4 fois 8… », la solution « 32 » est activée de façon beaucoup plus automatique que lorsqu'il entend « 8 plus 4 ». Il y a plus d'associations verbales dans la mémorisation des multiplications élémentaires que dans celle des additions et des soustractions élémentaires (les psychologues disent que les multiplications sont mémorisées de façon plus déclarative).

C'est pourquoi les choix pédagogiques de *J'apprends les maths CE1* concernant l'addition et la soustraction diffèrent de ceux concernant la multiplication :

– les élèves apprennent à reconstruire très rapidement les résultats des additions et soustractions élémentaires en utilisant des stratégies de calcul réfléchi variées : passage de la dizaine, retour aux cinq ou usage des doubles dans le cas de l'addition ; calcul « en avançant » ou « en reculant » dans celui de la soustraction ;

– ils apprennent également à reconstruire très rapidement le résultat dans le cas de la multiplication, mais en utilisant toujours la même stratégie, celle qui consiste à s'appuyer sur l'organisation des résultats des multiplications élémentaires en tables.
Pour retrouver le résultat de 4 fois 6, par exemple, les élèves le cherchent au 6e rang de la table de 4 : c'est donc juste après « 4 fois 5, 20 », c'est 24 (c'est 20 + 4 parce que dans la table de 4, les résultats vont de 4 en 4). Ce résultat pourrait être retrouvé de bien des façons (calculer 2 fois 6 puis doubler ; calculer 6 fois 4 sous la forme 5 fois 4 et encore 1 fois 4, etc.), mais il est essentiel que lorsqu'on demande à un élève un résultat de multiplication, il ne s'interroge pas longuement sur la stratégie qu'il convient de choisir, auquel cas on comprend mal comment il pourrait créer l'association verbale entre « 4 fois 6… » et « 24 ».

Table de 4
4 fois 1, 4
4 fois 2, 8
4 fois 3, ...
4 fois 4, ...
4 fois 5, ...
4 fois 6, ...
4 fois 7, ...
4 fois 8, ...
4 fois 9, ...
4 fois 10, ...

Remarque : la formulation des tables qui a été retenue est la formulation traditionnelle, celle qu'on trouve au dos des cahiers de brouillon : « 4 fois 1, 4 » ; « 4 fois 2, 8 » ; « 4 fois 3, 12 », etc. et non « 1 fois 4, 4 » ; « 2 fois 4, 8 » ;

« 3 fois 4, 12 », etc. (dans la table de 4, tous les résultats commencent par « 4 fois… »). Un argument décisif en faveur de ce choix est le fait que cette formulation est celle qui permet le mieux de retrouver le résultat d'un partage élémentaire à partir de la connaissance des tables. S'il faut chercher le résultat du partage de 28 objets entre 4 personnes, par exemple, l'enfant est conduit à imaginer ces 4 personnes et à chercher ce qu'il convient de donner à chacune pour que ça fasse 28 en tout. Il cherche donc à compléter 4 fois… font 28 ; c'est très exactement le sens de la table de multiplication par 4 que nous avons retenue : 4 fois 7 font 28. Au CE1, seuls les résultats des partages élémentaires par 2 et 5 sont au programme (la table de 2 commence par « 2 fois… » et celle de 5 par « 5 fois… »), mais, concernant les autres tables, il convient évidemment de fixer au CE1 la façon dont elles seront apprises durant les années suivantes.

Préparer l'enseignement de la division

Le mot « division » n'apparait nulle part dans les programmes du cycle 2 de 2008, seul le mot « partage » y apparait. Or, de même que la multiplication n'est pas une simple addition répétée, de même que la soustraction est loin de toujours correspondre à un retrait physique (« *Il y a 37 personnes dans un autocar ; d'autres personnes montent et après il y en a 81*… »), la division ne peut en aucun cas être réduite à la seule recherche du résultat d'un partage. Lorsqu'on dispose de 152 €, par exemple, pour acheter des cahiers à 3 € l'un et lorsqu'on s'interroge sur le nombre de cahiers qu'il est possible d'acheter, il convient de faire une division. Et pourtant l'idée de partage ne semble guère présente dans un tel énoncé. Ce problème se reconnait facilement en tant que problème de division lorsqu'on sait que cette opération permet également de répondre à la question : « *En 152, combien de fois 3 ?* ».

Ainsi la division a deux grandes significations : la partition (*a* partagé en *b* parts égales) et la quotition (en *a* combien de fois *b* ?). La partition est la signification banale de cette opération, celle que tous les enfants apprennent quelle que soit la pédagogie adoptée en classe (c'est une conséquence du fait que dans le langage quotidien, le mot « diviser » fonctionne comme synonyme de « partager »). C'est donc sur l'autre signification qu'il convient d'insister à l'école, notamment lors de la première rencontre avec cette opération : dans *J'apprends les maths CE2*, la première fois que les élèves rencontrent le signe « ÷ » c'est pour résoudre des problèmes de quotition. Et ce signe n'est introduit qu'en CE2 parce que c'est le moment où les élèves sont très majoritairement prêts à comprendre pourquoi la même opération permet à la fois de résoudre des problèmes de partition et de quotition alors que ceux-ci apparaissent *a priori* très différents.

Pour autant, conformément au programme, les élèves apprennent dès *J'apprends les maths CE1* à partager en 2 et en 5 ; comme nous l'avons vu, ils mémorisent même le résultat de tels partages dans les cas simples. De même qu'il n'est pas nécessaire d'avoir étudié la multiplication pour résoudre certains problèmes d'addition répétée, il n'est pas nécessaire d'avoir étudié la division pour résoudre certains problèmes de partage et c'est le cas de ceux qui sont au programme du CE1.

Remarque : il est arrivé que dans l'évaluation de fin de CE1, le signe « ÷ » soit utilisé alors qu'il n'est pas au programme ; en fait, il suffit de dire ce jour-là aux élèves qu'ils doivent le lire « partagé » pour qu'ils sachent faire les exercices correspondants. Cette intervention pédagogique qui s'effectue en passant, sans insister, n'aura pas à plus long terme de conséquences néfastes.

Enseigner la résolution de problèmes : les « PAC »

Dans une recherche récente[6], des élèves de début de CE2 se sont vu proposer les deux problèmes suivants qui sont proches de ceux proposés à des enfants brésiliens qui n'étaient jamais allés à l'école :
M1 : *Combien y a-t-il d'images en tout dans 3 paquets de 10 images ?*
M2 : *Combien y a-t-il d'images en tout dans 10 paquets de 3 images ?*
Le taux de réussite est de 78% au 1er problème et de 52% au 2e. Pourquoi peut-on espérer que les élèves qui ont utilisé *J'apprends les maths CE1* réussissent mieux à chacun de ces problèmes ?

Concernant le 1er problème, parce qu'on leur a appris à le résoudre en construisant un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé : on peut raisonner sur des points comme si c'étaient les images de l'énoncé ; or, dans 3 groupes de 10 points, il y a 30 points en tout (*cf.* la section de ce chapitre consacrée à l'apprentissage de la multiplication).

Concernant le 2e problème, d'une part, parce que lors de l'introduction de la multiplication l'accent a été mis sur la commutativité de cette opération, d'autre part parce qu'après cette séquence les élèves sont fréquemment confrontés à ce type de problèmes. Il est en effet assez facile de vérifier que, dans la plupart des méthodes de CE1, le premier type de problème est assez fréquemment proposé mais que le second ne l'est pratiquement jamais. On peut ainsi considérer qu'un grand nombre d'élèves ne sont jamais confrontés durant leur année de CE1 à un « vrai problème de multiplication », c'est-à-dire un problème d'addition répétée qui nécessite l'usage de la commutativité. Ce n'est pas le cas de ceux qui apprennent avec *J'apprends les maths*.

Mais les 22% d'échec au 1er problème soulève la question des élèves en échec grave du fait que, face à un énoncé de problème arithmétique, ils ne cherchent pas à le comprendre,

6. Brissiaud, R. & Sander, E. (2010), *ibid.*

ils ne construisent aucun modèle mental de la situation qui y est décrite parce qu'ils essaient de deviner l'opération arithmétique permettant d'obtenir le résultat en s'appuyant sur des indices superficiels tels que :
– le maitre propose souvent des problèmes qui mettent en jeu la dernière opération étudiée en classe, c'est celle-là qu'il faut utiliser ;
– si les données numériques du problème contiennent 2 nombres à 2 chiffres, comme la multiplication de ces nombres n'est pas au programme du CE1, ce n'est pas l'opération cherchée ; l'addition est bien plus probable ;
– etc.
Un tel comportement trouve souvent son origine dans une tâche scolaire qui, malheureusement, est fréquemment proposée dès le CE1 : face à divers énoncés de problèmes, les élèves doivent, pour chacun d'eux, choisir la « bonne opération » permettant de le résoudre. Est-ce « *la plus* », « *la moins* » ou « *la multiplié* » ? Cette tâche conduit de nombreux élèves à penser qu'on pourrait faire un tel choix sans construire un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé.
Cette tâche n'est évidemment pas proposée dans *J'apprends les maths*. De plus, à partir de la sq 23, les élèves rencontrent régulièrement un type de séquences qu'on a appelé **Problèmes pour apprendre à chercher** (PAC) et dont l'objectif principal est d'apprendre aux élèves à construire un modèle mental de la situation décrite dans un énoncé verbal. Quand ils savent le faire, ils ont bien évidemment la possibilité d'écrire des égalités arithmétiques reliant les données numériques à la solution. Mais la production d'une telle égalité n'est pas ce qui est visé en premier. Au CE1, d'ailleurs, très souvent, c'est seulement après avoir trouvé la solution numérique à l'aide d'un schéma ou en calculant mentalement que les élèves peuvent accéder à une égalité : elle n'est pas encore un moyen de trouver le résultat, elle permet plutôt un codage arithmétique du processus mental ayant conduit à la solution. Dans les PAC, cette égalité n'est donc pas exigée d'emblée, et il convient évidemment d'apprécier tout aussi positivement le travail d'un élève qui a résolu un problème à l'aide d'un schéma que celui d'un autre qui, d'emblée, aura mobilisé une opération arithmétique.

Par ailleurs, une autre caractéristique des énoncés de problèmes proposés dans les PAC est leur diversité : on y trouve mélangés des problèmes simples que les meilleurs élèves peuvent résoudre directement à l'aide d'une opération arithmétique et d'autres (où l'on cherche « en *a* combien de fois *b* ? » par ex.) qu'ils ne peuvent pas résoudre à l'aide d'une opération arithmétique parce que celle-ci n'a pas encore été étudiée. Il s'agit de mettre en défaut le comportement consistant à mobiliser une opération sur des indices superficiels, pour mieux faire passer l'idée que pour résoudre un problème arithmétique, il est incontournable de construire un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé.

L'organisation en 3 périodes pour favoriser la compréhension de l'écriture des nombres

La 1re période vise essentiellement à ce que les élèves s'approprient les stratégies de calcul mental de l'addition, de la soustraction, de l'addition répétée et du partage avec les 100 premiers nombres.

La 2e période est dédiée principalement à la découverte des 200 premiers nombres ainsi qu'au calcul mental et en colonnes avec ces nombres. En effet, aborder trop rapidement les 1 000 premiers nombres serait une source d'incompréhension importante. Il est facile d'apprendre que 140, par exemple, c'est 100 plus 40, parce que cela « s'entend » lorsqu'on dit ce nombre (cent quarante). En revanche, il est difficile d'apprendre que 140, c'est 14 groupes de dix ou 14 dizaines. Là encore, c'est la responsabilité de l'école de mettre l'accent sur cette propriété. En effet, comment comprendre le phénomène de la retenue lorsqu'on additionne 8 dizaines et 6 dizaines en colonnes, si l'on ne sait pas que 14 dizaines, c'est cent quarante ? Comment apprendre à calculer mentalement et en colonnes la multiplication 73 x 2 lorsqu'on ne sait pas que 2 fois 7 dizaines, c'est 140 ? Mieux vaut consacrer du temps à l'apprentissage des opérations jusqu'à 200 avant d'aborder de plus grands nombres (dans les cantons suisses francophones, seuls les 200 premiers nombres sont au programme du CE1).

Dans la 3e période, les stratégies mentales comme les techniques en colonnes sont étudiées à nouveau avec les 1 000 premiers nombres, après que les élèves ont appris que 450, c'est 45 dizaines. Ainsi, les élèves rencontrent dans cette période les mêmes séquences pédagogiques que celles qu'ils ont rencontrées dans la période précédente, mais avec des nombres plus grands. Cette rencontre répétée avec des séquences de même structure facilite la compréhension des élèves les plus fragiles. De même qu'ils ont appris à calculer 31 x 5 en utilisant le fait que « 5 fois 3 dizaines, c'est 150 », ils apprennent à calculer 91 x 5 en utilisant le fait que « 5 fois 9 dizaines, c'est 450 ».

Ainsi, avec le calcul mental et la résolution de problèmes, une bonne compréhension de la numération décimale est l'autre clé de la réussite à ce niveau de la scolarité. La progression adoptée dans *J'apprends les maths CE1* fournit ces trois clés aux élèves.

Chapitre 2

Espace et géométrie ; Grandeurs et mesures

PLAN DU CHAPITRE

- De l'espace vécu à l'espace représenté
- Langage géométrique et langage quotidien
- Une nouvelle approche de la mesure des longueurs

De l'espace vécu à l'espace représenté

Tout au long des cycles 2 et 3, un enjeu essentiel des activités sur l'espace est d'amener l'enfant à s'y situer et à s'y représenter. À terme, en effet, il s'agit pour lui de *se comprendre dans l'espace*. L'école a un rôle essentiel pour favoriser ce processus de « décentration ». Cependant, une première constatation s'impose : l'enfant n'a pas du tout les mêmes expériences perceptives et motrices suivant les dimensions de l'espace dans lequel il agit. Pour penser le progrès des enfants, il ne convient donc guère de parler de l'« espace » comme si celui-ci constituait pour eux un champ homogène d'expériences. On est dès lors conduit à distinguer divers espaces : le micro-, le méso- et le macro-espace[1].

« Micro-espace, méso-espace et macro-espace »

Dans « le tout petit espace » d'une feuille de papier, par exemple, l'enfant dispose d'une vue globale et « unifiante » qui lui permet de considérer simultanément le tout et ses parties (cette propriété est caractéristique de ce que nous appellerons un « micro-espace »). Dès lors, il peut agir (par exemple colorier, dessiner, écrire…) en tenant compte de la structure d'ensemble. Il peut ainsi relier deux points éloignés tout en contournant des objets-obstacles, ou apprendre à se déplacer dans un labyrinthe en anticipant les impasses et en testant des hypothèses sur des portions de parcours, etc. Dans ce micro-espace, l'enfant peut apprendre à coordonner des points de vue successifs et locaux avec un point de vue global et simultané.

Par contre, dans un espace bien plus grand, comme l'école ou le quartier, chaque endroit est nécessairement perçu de façon isolée. De chacun, l'enfant forme une sorte de tableau, plus ou moins riche de détails, agencés d'après le point de vue de la perception ordinaire, c'est-à-dire de face. En outre, quand ces divers tableaux sont liés entre eux, ils le sont sous forme de « séquences » qui se suivent dans l'ordre des parcours réellement effectués. Ces divers endroits sont perçus et mémorisés en s'enchaînant de manière séquentielle.

Du coup, des anticipations du même ordre que dans le labyrinthe du « tout petit espace » ne sont plus possibles. Par exemple, si un trajet donné n'a été parcouru que dans un sens, il est fréquent que l'enfant ne sache pas le parcourir dans le sens inverse. Par exemple encore, il est extrêmement difficile à un jeune enfant de prévoir que s'il tourne successivement quatre fois à droite dans un quartier où les rues se croisent à la manière d'un quadrillage, il se retrouvera à son point de départ. Pour prévoir ce phénomène, il devrait construire une carte mentale de ce quartier,

1. Nous empruntons ces termes à un didacticien des mathématiques, G. Brousseau (*cf.* Brousseau, 1983), mais en leur donnant une signification différente : notre « méso-espace » réunit deux types d'espaces qui, dans son approche, sont distingués. La distinction que Brousseau avance est pertinente, mais si nous l'avions retenue, nous aurions dû parler d'un « méso-espace 1 » et d'un « méso-espace 2 » et cela aurait inutilement compliqué l'exposé.

c'est-à-dire adopter un point de vue virtuel sur cet espace, celui d'un observateur situé « en l'air » et qui se donne une vue schématique du pâté de maisons (en le ramenant à un quadrilatère) ou du quartier (en le pensant comme un quadrillage). Faute de ce type de reconstruction mentale dans ce méso-espace, l'enfant n'a que des expériences perceptives et motrices locales et successives. Il ne dispose pas d'un point de vue unifiant qui lui permettrait de les coordonner dans une représentation du tout.

Enfin, s'agissant d'espaces bien plus grands encore, l'enfant n'en a aucune expérience perceptive et motrice. Ou bien, s'il s'y déplace vraiment, faute d'une représentation adéquate de l'inclusion des espaces, il ne peut relier l'expérience de ce macro-espace à celui de son cadre de vie. Il y a ainsi tout un monde entre un trajet vers Paris perçu par l'enfant qui voyage en train et ce même trajet représenté sur la carte de la France, beaucoup plus qu'entre le schéma d'un objet et l'objet lui-même. Quand l'adulte montre un point sur la carte de la météo de la télé et dit : « Mamie est là, elle aura beau temps demain », le jeune enfant, qui pourtant va fréquemment chez sa grand-mère en vacances, reste perplexe. Tant qu'il n'a pas compris cette carte comme une représentation miniaturisée et schématisée de la réalité, il n'y a pas de raison pour qu'il accepte de situer sa grand-mère en un point de l'écran de télévision où elle n'apparait pas. L'enfant ne peut accéder au macro-espace qu'à mesure qu'il s'en approprie les représentations culturelles.

Comment penser le progrès des enfants ?

Des analyses qui viennent d'être faites, on peut tirer de premières conclusions pédagogiques. Le progrès des enfants semble lié à deux types d'acquisitions et à leur articulation :

1. Les apprentissages dans le micro-espace amènent progressivement l'enfant à faire toutes sortes d'anticipations sur les objets et les structures qui y sont représentés. Parce que sa perception de ces objets lui en donne une vue « dominante », il peut adopter sur eux des points de vue variés.

Les activités géométriques (au sens traditionnel) visent à développer ce type de « compétences spatiales ». Grâce aux actions que l'enfant peut entreprendre dans cet espace (relier des points, prolonger des droites, tracer des parallèles, analyser les figures selon leurs composants – portions, points, segments, angles… –, comparer des longueurs, des aires ou des angles, reproduire par translation ou compléter par symétrie, chercher un axe de symétrie, repérer les homothéties, etc.), il construit des connaissances de plus en plus riches. Celles-ci s'appuient sur l'emploi de plus en plus savant d'un vocabulaire spécifique et sur la maitrise progressive des techniques de tracé. Il se libère peu à peu de l'orientation anthropomorphique de la feuille et des figures. Il est capable de réaliser et d'imaginer mentalement des rotations ou des transformations, d'adopter, sur les figures ou les solides, des points de vue différents et même des points de vue virtuels… Bref, il développe ainsi ses possibilités d'anticiper les effets de ses actions dans le micro-espace.

2. L'apprentissage des représentations 2D va permettre à l'enfant de traiter le méso-espace et le macro-espace comme s'il s'agissait d'un micro-espace et d'opérer sur ces miniaturisations à l'aide d'une perception « dominante ». Le micro-espace devient ainsi un modèle pour tous les espaces possibles.

Il est évident que si l'enfant peut traiter ainsi le méso-espace et le macro-espace en projetant sur eux les connaissances acquises dans le micro-espace, c'est qu'il a effectivement conçu l'analogie entre ces représentations 2D et la réalité qu'elles représentent. Faute de cela, elles ne peuvent être considérées comme des substituts mentaux de la réalité ; elles restent des formes sans signification.

C'est ce qui se passe si l'on demande à un enfant de relier deux points sur une carte sans qu'il ait une idée approximative de la distance réelle qu'il symbolise ainsi. En revanche, l'adulte qui utilise une représentation 2D est capable de coordonner des points de vue différents sur cet espace : les points de vue séquentiels et successifs de son expérience perceptive et motrice et le point de vue global et simultané de la représentation 2D. Par exemple, lorsqu'il décrit un parcours sur le plan d'une ville ou lorsqu'il trace le plan de ce parcours, chaque repère est simultanément représenté dans l'espace 2D et perçu mentalement selon le point de vue horizontal qui est celui du déplacement dans l'espace réel. L'adulte dit par exemple : « Tu laisses la mairie sur ta gauche et tu continues tout droit. » Or, au même instant, il dessine un rectangle (représentant la mairie) le long d'une ligne, comme s'il voyait l'endroit depuis un hélicoptère, mais dans son esprit la mairie lui apparait – grossièrement – telle qu'il la voit effectivement lorsqu'il passe devant et la « laisse » sur sa gauche, avec son escalier monumental, ses murs de pierre taillée, ses géraniums aux balcons…

Ce n'est donc que si l'enfant est capable de coordonner ainsi les différents points de vue qu'il peut utiliser le micro-espace d'une représentation 2D comme substitut mental et comme modèle d'un espace bien plus grand. Il est donc décisif de l'amener à se repérer fréquemment sur des supports de représentation de son méso-espace où il devra coordonner des points de vue différents : les plans de sa salle de classe, de son village ou de sa ville, de sa région, d'une manière générale de tous les espaces dont il a une expérience directe. Ils constituent des supports essentiels à la compréhension des représentations 2D dans leur ensemble. À terme, la réussite dans des parcours d'orientation avec carte et boussole témoigne que l'enfant est devenu capable de relier le point de vue vertical du déplacement sur la carte avec celui du déplacement horizontal dans la réalité.

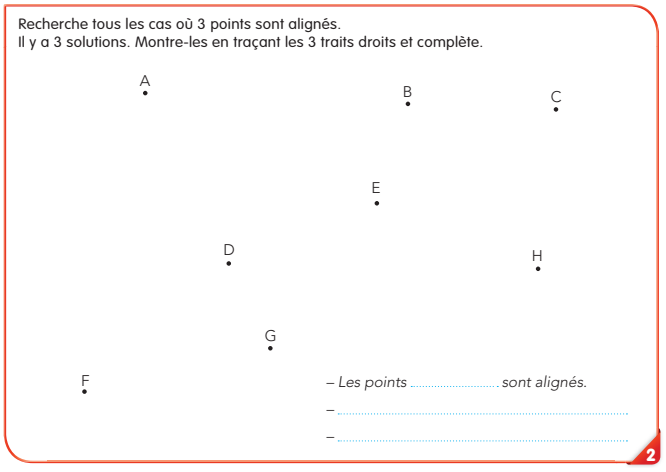
Quant au macro-espace, celui-ci ne peut se construire que par analogie avec le méso-espace. La carte de la France, le planisphère… représentent des espaces de dimensions fort différentes et dont on ne peut avoir que des expériences nécessairement partielles.

Les choix de *J'apprends les maths*

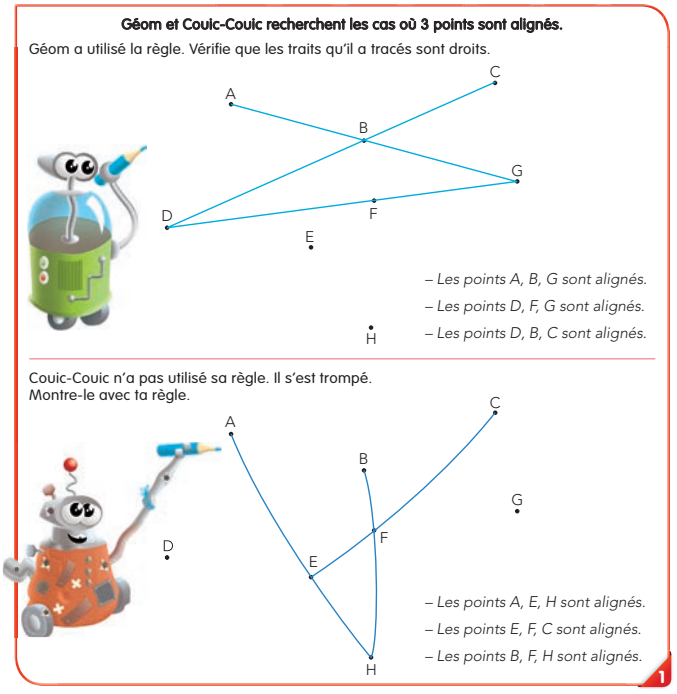
Dans *J'apprends les maths CE1*, l'enseignant trouvera donc deux grands types d'activités :
– Des activités dont l'objectif est le *développement d'habiletés dans le micro-espace de la feuille de papier* : divers tracés géométriques (tracés à la règle et sur quadrillage), repérage de positions de manière absolue (en haut à droite dans la feuille, sur le nœud B4, etc.) ou relative (à droite de tel personnage, par ex.).
– Des activités portant sur *le passage de l'espace 3D à l'espace 2D* en activité complémentaire page 123 de ce *Livre du maitre*.

Au-delà du contenu, un grand nombre de séances de géométrie ont une forme commune qu'il convient de présenter. Les élèves sont souvent amenés à analyser la façon dont deux personnages, Géom et Couic-Couic, ont réalisé la tâche qui va leur être proposée.

Considérons par ex. la sq 21 des p. 34 et 35, où les élèves doivent déterminer les cas où 3 points sont alignés :



Ils sont auparavant amenés à analyser la réalisation d'une tâche semblable par Géom et Couic-Couic :



En fait, les réalisations de Géom sont toujours correctes tandis que celles de Couic-Couic comportent toujours *3 erreurs*. Lors de la découverte de l'activité, le travail de Géom permet ainsi aux élèves de découvrir ce vers quoi ils devront tendre : le personnage de Géom délivre aux élèves le but de la tâche. En début de séance, on procède de même à l'analyse collective des erreurs de Couic-Couic : dans l'exemple précédent, il a joint à main levée trois des points à chaque fois que ceux-ci lui paraissaient alignés. Le personnage de Couic-Couic permet ainsi aux élèves de prendre conscience des contraintes de la tâche : les trois points doivent se trouver sur *une même ligne droite* et seule la règle permet de s'en assurer.

Ce procédé pédagogique a pour objectif d'amener les élèves à anticiper les actions qui leur permettront de réussir les tâches qui leur sont proposées. En effet, il est toujours plus facile à un jeune enfant de comprendre « ce qu'il faut faire » en le comparant à « ce qu'il ne faut pas faire ». Lorsqu'on présente seulement une exécution correcte, les contraintes qu'il faut gérer pour accéder à la réussite restent implicites. En comparant en grand groupe, avec l'aide de l'adulte, le travail de Géom et celui de Couic-Couic, les enfants verbalisent les différentes contraintes de la tâche. Du coup, au cours de l'activité elle-même, ils régulent leur action différemment : on les voit plus souvent commenter leur travail, gommer, reprendre, etc.

Langage géométrique et langage quotidien

Des difficultés liées à la sémantique du langage ordinaire

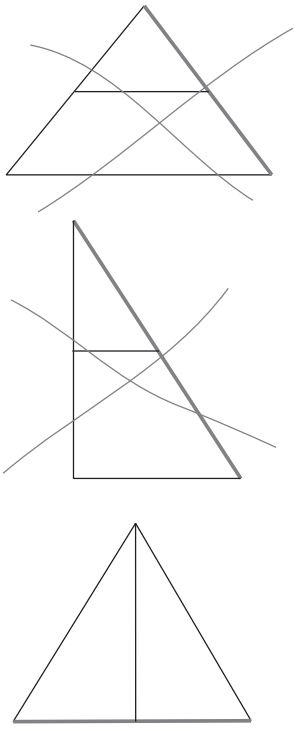
L'enfant s'approprie certains mots du langage géométrique conventionnel (« sommet », « côté »,« face », « base », par exemple) alors qu'il a déjà rencontré ces mêmes mots dans une pratique ordinaire de la langue. Or ces mots n'ont pas le même sens dans l'une et l'autre langue, et ce peut être la source de difficultés.

Ainsi, dans le langage quotidien, un « sommet », quand il n'est pas la rencontre de « hautes personnalités », est le plus souvent celui d'une montagne, et ce mot réfère alors au point le plus haut de cette montagne. Le triangle, lui, a 3 sommets et il suffit que ce triangle soit « posé sur une pointe » pour qu'un de ses sommets soit le *point le plus bas* de la feuille de papier !

Et que penser des « petits côtés » d'une feuille 21 x 29,7 qui, lorsqu'on écrit sur cette feuille, sont situés « en haut » et « en bas » de la feuille, et non « sur les côtés » comme on pourrait s'attendre à les y trouver ?

Considérons le travail suivant, qui est celui d'un élève de 6e lors de l'évaluation nationale de septembre 1989 :

Trace un triangle avec l'un des côtés en couleur ;
puis trace un segment qui joint le milieu du côté colorié
au sommet opposé.



Lors de sa première tentative, l'élève choisit très classiquement un côté colorié « sur le côté » (droit). Mais il n'arrive pas à déterminer le sommet opposé du fait que ce point ne lui apparait pas comme « un sommet ». Il décide de recommencer.

Lors de la tentative précédente, c'était la détermination d'un sommet qui posait problème. Dans cette 2e tentative, l'élève croit pouvoir résoudre le problème en accentuant les caractéristiques perceptives du seul sommet qu'il considère, celui du haut de la feuille. Alors que son premier triangle ressemblait à un volcan d'Auvergne, le second est un pic alpin ! Il y a moins de chance que l'enfant perde de vue un tel sommet. Mais ce sommet-là ne convient pas et le problème n'est donc pas résolu.

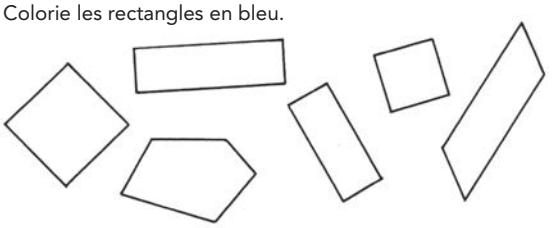
Finalement, c'est en renonçant à situer le côté colorié « sur le côté » que l'enfant réussit la tâche qui lui est demandée. Il lui est plus facile de renoncer à placer le côté « sur le côté » que de renoncer à placer le sommet en haut de sa feuille. On voit comment cet enfant « s'est débattu » avec les mots « côté » et « sommet » pour enfin réussir cette tâche géométrique.

Il est clair que pour aider les enfants, il convient d'exhiber ces différences d'usage des mêmes mots, de les confronter comme ils l'ont été ci-dessus et d'insister pour que les enfants, lorsqu'ils ont à dessiner un triangle quelconque, fassent usage d'une représentation du triangle *différente de son stéréotype*, une représentation où ce triangle ne ressemble pas à une montagne.

Des difficultés liées à la pragmatique du langage ordinaire

Considérons la tâche suivante :

Colorie les rectangles en bleu.



L'enseignant ne devra évidemment pas s'étonner qu'un enfant, lorsqu'il est confronté à cette tâche, ne colorie pas les carrés en bleu. En effet, alors que pour le mathématicien le carré est un rectangle (un rectangle particulier, qui a 2 côtés adjacents de même longueur), pour le jeune enfant ce n'est pas le cas.

Un premier niveau d'explication est le suivant : cet enfant ne dispose pas encore d'une définition relationnelle du rectangle et du carré, il procède encore à une catégorisation perceptive de ces figures. Dans ce cas, chacun des mots « rectangle » et« carré » est attaché à un prototype de figure et, comme la figure prototypique du rectangle n'est pas celle du carré, il n'y a aucune chance que le carré soit considéré comme un rectangle. C'est certainement le cas de nombreux enfants, mais il n'est pas sûr qu'il suffise de disposer d'une définition relationnelle du rectangle et du carré pour considérer les carrés comme des rectangles (des rectangles particuliers) dans la situation précédente.

En effet, la difficulté rencontrée ici dépasse le cadre des apprentissages géométriques. Montrons-le en examinant une situation similaire qui n'est pas de nature géométrique. Rappelons que les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 31, etc. sont premiers car ils ont pour seuls diviseurs 1 et eux-mêmes, et considérons la proposition suivante :
« Certains des nombres premiers plus grands que 31 sont impairs. »

Lorsqu'on demande à un adulte, même cultivé, de dire si cette proposition est vraie ou fausse, on peut s'attendre à deux types de réponse :
– soit il raisonne de façon ordinaire, et cette proposition ne le satisfait pas parce qu'il sait que « tous les nombres premiers plus grands que 31 sont impairs » ; de son point de vue, il n'est pas acceptable de dire seulement que certains de ces nombres sont impairs, et il risque de rejeter cette proposition comme fausse ;
– soit il raisonne comme un mathématicien, et la proposition « certains des nombres premiers plus grands que 31 sont impairs » est acceptée comme vraie car si tous ces nombres premiers sont impairs, il est clair que certains le sont.

Cet exemple montre qu'un adulte averti, qui a toutes les connaissances nécessaires, peut se laisser surprendre par ce type de tâche.

Dans les deux situations précédentes, la réponse« scolaire » qui est attendue nécessite une inférence : « un carré est

un rectangle particulier » dans un cas, « si tous les nombres considérés sont impairs, certains le sont » dans l'autre. Ce qui pose problème, ce n'est pas tant la difficulté de ces inférences que le fait qu'un interlocuteur ordinaire s'arrangera pour que je n'aie jamais à faire ce genre d'inférence. Dans l'un et l'autre cas, les questions sont posées sous une forme qui n'est pas celle d'un dialogue ordinaire[2].

Il y a donc une spécificité du raisonnement mathématique. Lorsqu'un enfant est confronté à certaines tâches (colorier les rectangles, par exemple), il ne lui suffit pas d'avoir les connaissances nécessaires (le carré est un rectangle particulier, dans le cas de cette tâche). Pour comprendre l'énoncé de la tâche, il doit, de plus, penser à raisonner de manière « savante » et non tel qu'il le fait spontanément pour comprendre le langage ordinaire.

Il est clair qu'il s'agit là d'un apprentissage au long cours ! C'est pourquoi, dans *J'apprends les maths CE1*, nous sommes évidemment attentifs au fait de présenter le carré comme un rectangle particulier, mais nous ne considérons pas qu'en fin de cycle 2, ce point de vue savant sur le carré peut être celui de tous les élèves. Il s'agit de ne pas différer la rencontre des élèves avec un usage savant des mots, tout en ayant conscience de la difficulté que certains d'entre eux éprouvent à s'approprier un tel usage.

Une nouvelle approche de la mesure des longueurs

Quelques généralités sur la mesure

Rappelons d'abord quelques généralités concernant la mesure des grandeurs. Trois sortes d'entités doivent en effet être distinguées :

– *Les supports des grandeurs* : on parlera, par exemple, de la longueur d'un segment de droite, ou d'une ligne brisée, mais de l'*aire* d'un triangle ou d'un rectangle. Plus généralement, on ne peut parler d'un type de grandeur donné que relativement à un certain type de support : on parle de longueurs concernant des segments de lignes droites ou courbes, on parle d'aires concernant des surfaces délimitées (qu'elles soient planes ou courbes), on parle de volumes concernant des solides, etc.

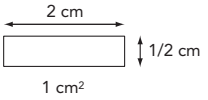
– *Les grandeurs elles-mêmes* (les longueurs, les aires, les volumes par exemple) ne doivent évidemment pas être confondues avec l'un des supports qui les réalisent : une même longueur correspond à des segments de lignes dont certaines sont droites, d'autres sont brisées et d'autres courbes, une même aire peut être celle d'un triangle ou d'un rectangle, etc.

– Enfin, *une mesure* d'une longueur donnée (d'une aire donnée, etc.) est un nombre qui exprime le rapport de cette longueur (de cette aire, etc.) à une autre longueur (à une autre aire, etc.) qu'on appelle *unité*.

À une même longueur (respectivement une même aire) correspondent donc diverses mesures de cette longueur (de cette aire) selon l'unité qui est choisie.

Un mot manque dans ce glossaire : celui d'étalon. L'étalon est à l'unité ce que le « mètre-étalon » construit en platine et « déposé au pavillon de Breteuil » est au mètre : l'étalon est une réalisation (une matérialisation) de l'unité. L'unité est une grandeur (le cm, par exemple, est une longueur), mais dans un étalon d'1 cm, cette grandeur est attachée à un support : une bande de 1 cm de long, par exemple.

Le passage d'une unité à un étalon qui réalise cette unité peut réserver des surprises : un rectangle de largeur 1/2 cm et de longueur 2 cm, par exemple, est un étalon du cm^2.



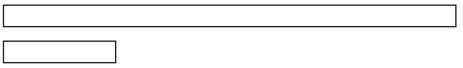
Les enfants de CM sont souvent surpris en présence « d'un centimètre carré qui n'est pas carré », mais on aura compris que c'est l'étalon qui n'est pas carré car le cm^2, qui est une aire, n'a aucune forme qui lui soit attachée. De même, si le mètre-étalon du pavillon de Breteuil est droit, c'est uniquement pour des considérations pratiques !

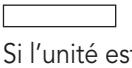
Mesurer les longueurs en cm et, dans le même temps… en allumettes

La notion d'étalon est importante pour comprendre la didactique de la mesure à l'école primaire. En effet, l'activité qui, classiquement, sert à introduire la mesure des longueurs est la suivante : on a choisi un étalon de longueur et on arpente divers segments à l'aide de cet étalon. La mesure obtenue s'exprime alors soit par un nombre entier, soit par un encadrement entre deux entiers successifs.

Ce procédé d'arpentage est fondamental car c'est lui qui permet de donner aux enfants l'intuition de ce qu'est une mesure : ce segment est long comme 3 allumettes, par exemple. Il est par ailleurs adapté aux jeunes enfants parce qu'il conduit à un encadrement par des mesures entières alors que la mesure est un rapport qui, généralement, ne peut pas s'exprimer par un nombre entier (la diagonale du carré dont le côté mesure 1 a pour mesure $\sqrt{2}$).

Examinons la progression qui est le plus souvent adoptée aujourd'hui. On propose successivement aux enfants les deux sortes d'activités suivantes :

A 

U 

Si l'unité est U, la bande A mesure…

2. Tout dialogue repose sur des conventions : si, par exemple, quelqu'un me demande « Avez-vous l'heure, s'il vous plait ? », je sais que la réponse « Oui » ne suffit pas, bien que cette réponse soit « correcte » d'un certain point de vue (celui de la sémantique). C'est Grice (1975) qui, le premier, a mis en évidence et a analysé cette sorte de contrat tacite qui lie des partenaires soucieux de communiquer et qui explique que chacun d'eux sait « doser » l'information qu'il transmet : ni trop, ni trop peu. Parfois, en mathématiques, le contrat est différent de celui qui régit les situations de la vie ordinaire : de manière évidente, qu'il s'agisse de l'exemple de géométrie ou de celui d'arithmétique, l'enseignant qui pose la question n'en dit pas assez pour être sûr d'être compris. L'article précédent de Grice peut être considéré comme l'article fondateur d'une branche de la linguistique qu'on appelle la « pragmatique ». En psychologie cognitive, la plupart des chercheurs qui étudient le raisonnement chez l'enfant comme chez l'adulte utilisent les travaux de Grice (voir Politzer, 1990, par exemple).
Grice H.P., « Logique et conversation », *Communications*, n° 30, 1975, pp. 52-72.
Politzer, « Le raisonnement déductif », in Richard J.F., Bonnet C. & Ghiglione R., *Traité de psychologie cognitive 2*, Paris, Dunod, 1990.

V ☐

Si l'unité est V, la bande A mesure…

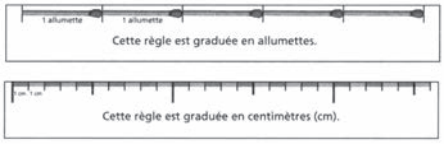
Puis :

Il n'y a pratiquement pas de transition entre une activité et l'autre : l'enfant procède d'abord à des arpentages avec des unités quelconques, et lorsqu'il rencontre une unité conventionnelle de longueur, c'est directement avec la règle graduée en cm, c'est-à-dire sous une forme très élaborée où l'arpentage qui a permis la mesure n'est pas facile à reconstituer mentalement.

Cette progression présente un double inconvénient :
– lorsqu'ils arpentent avec une unité quelconque, beaucoup d'enfants n'ont pas conscience qu'ils mesurent parce qu'ils ont déjà une connaissance sociale du phénomène de la mesure et que pour eux, mesurer, ça se fait « avec la règle et avec des cm » ;
– lorsqu'ils mesurent avec la règle graduée, ils ne font aucun lien entre cet outil et le résultat d'un arpentage à l'aide d'un étalon d'1 cm.

Du coup, lorsqu'on demande aux enfants de « montrer 1 cm sur la règle », ils montrent le plus souvent l'intervalle entre 0 et 1, mais la longueur d'un intervalle entre 2 numéros successifs n'est pas aussi facilement interprétée comme 1 cm. En fait, de nombreux enfants apprennent à se servir d'un double décimètre par répétition de la « bonne séquence d'actions » (je pose le 0 sur une extrémité du segment, je regarde à l'autre extrémité, etc.), sans réellement comprendre la structure de cet outil. De nombreuses erreurs attestent d'ailleurs de la nature de cet apprentissage : certains enfants font coïncider une extrémité du segment avec le 1 (et non le 0), d'autres avec le bord de la règle.

C'est une autre progression qui a été adoptée dans *J'apprends les maths*. On y utilise de manière conjointe l'allumette et une bande de longueur 1 cm, comme *étalons de longueur*. C'est ainsi que les enfants disposent de 2 règles graduées, l'une en allumettes et l'autre en cm :



On leur propose de mesurer des longueurs d'abord en allumettes, puis en centimètres.
Ces utilisations successives de 2 étalons doivent amener les élèves à mieux se représenter ce qu'est une longueur de 1 cm. En effet, l'arpentage est explicite dans la règle graduée en allumettes (de manière évidente, on y a mis bout à bout des allumettes). Or une règle graduée en cm est construite de la même manière : on y a mis « bout à bout des cm ».
Les enfants s'approprient d'autant mieux cette structure de la règle graduée en cm qu'elle est, dans un premier temps, dépourvue de toute numérotation. Pour mesurer la longueur d'un segment, ils sont ainsi amenés à « compter les cm ». On veut par là qu'ils comprennent qu'une longueur de 6 cm est équivalente à 6 longueurs de 1 cm mises bout à bout. Lorsqu'ils utiliseront un double décimètre numéroté, il leur sera plus facile de comprendre que, depuis le trait du 0 jusqu'au trait du 6, il y a 6 longueurs de 1 cm.

Remarquons que certaines expressions qui viennent d'être employées sont incorrectes :
– Il est incorrect de dire qu'on met « bout à bout des centimètres », car ce sont des bandes de longueur 1 cm qui sont juxtaposées et non des cm. Cette façon de s'exprimer relève de la confusion entre « unité » et « étalon » !
– Il est incorrect de dire qu'« un segment mesure 2 allumettes », car l'allumette est un étalon ; il serait préférable de dire que « ce segment mesure 2 quand l'unité est la longueur de l'allumette ». Encore une confusion entre « unité » et « étalon » !
Mais ce n'est pas toujours en s'exprimant d'emblée de la façon la plus correcte qu'on favorise le mieux l'apprentissage. Le cas des « incorrections » précédentes nous semble même montrer que certaines incorrections ont une grande valeur didactique. En effet, en choisissant deux entités dont l'une est un étalon (l'allumette) et l'autre une unité (le cm) et en acceptant le « jeu de langue » qui consiste à s'exprimer tantôt avec l'unité comme si elle était un étalon (« on met bout à bout des cm ») et tantôt avec l'étalon comme s'il était une unité (« un segment mesure 2 allumettes »), on aide l'enfant à s'appuyer sur ce qu'il connait le mieux, l'allumette-étalon, pour concevoir l'entité la plus abstraite, le *cm-unité*.

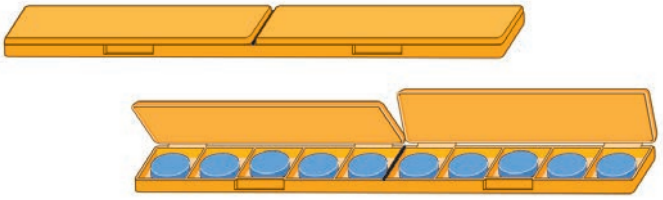
Par ailleurs, en utilisant deux étalons de longueurs différentes, on aide les enfants à prendre conscience que pour penser une mesure, il faut penser à la fois un nombre et une unité. Ainsi, l'erreur qui consiste à répondre que « 2 allumettes c'est moins long que 8 cm », du fait que $2 < 8$, est fréquente chez les débutants. Ces élèves doivent apprendre que pour comparer deux longueurs dont chacune est donnée par une mesure, la comparaison des nombres ne suffit pas car à chaque nombre est attachée une unité. De même, pour savoir quelle est la longueur exprimée par une mesure donnée (8 cm par exemple), il ne suffit pas de s'intéresser au nombre, il faut coordonner l'unité (le cm et non l'allumette) et le nombre de fois qu'elle est répétée (8).

Là encore, on remarquera l'utilisation didactique qui est faite de la différence de nature entre l'allumette (plus proche de l'étalon) et le cm (qui est une unité) : « le changement d'unité » sous-jacent à l'activité précédente (comparer 2 allumettes et 8 cm) serait très difficile s'il s'agissait de deux unités conventionnelles (le cm et le dm, par exemple) ; il est beaucoup plus simple lorsque l'une des unités (la longueur d'une allumette) correspond à un étalon familier.

L'approche didactique de la mesure des longueurs qui est exposée ici est donc nouvelle en ce sens que les activités d'arpentage avec un étalon familier ne précèdent pas l'introduction d'une unité conventionnelle. Bien au contraire, les longueurs sont *dans le même temps mesurées en cm et en allumettes*. L'interaction entre ces deux sortes de mesure est considérée ici comme un *facteur essentiel de l'apprentissage*.

La boite de Picbille

La boite de Picbille est formée de 10 cases avec un repère noir (amovible) permettant de mieux visualiser le repère 5.



Chaque compartiment contient 5 jetons.

La valise de Picbille contient 10 boites de 10 jetons.

Les boites de Picbille sont nécessaires pour animer les scénarios d'anticipation.

Il y a 8 jetons dans la boite.
Imaginez ce que je vois.
Combien faut-il ajouter de jetons pour en avoir 10 ?
Écrivez ce nombre.

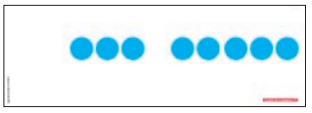
Anticipation.

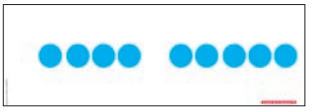
Validation

Retrouvez et téléchargez de nombreuses ressources sur le site compagnon : http://www.japprendslesmaths.fr

Les cartons fournis dans ce livre du maitre

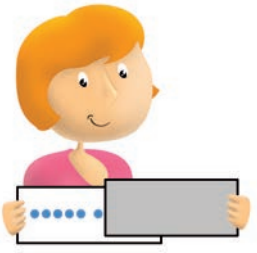
Ces cartons permettent d'animer les situations d'anticipation du résultat d'un retrait.





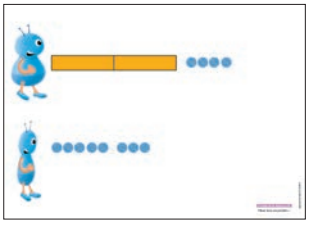
Exemple : 8 – 1

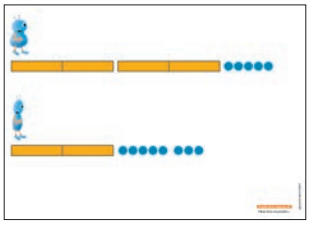
Anticipation.

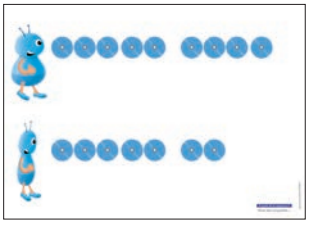


Validation

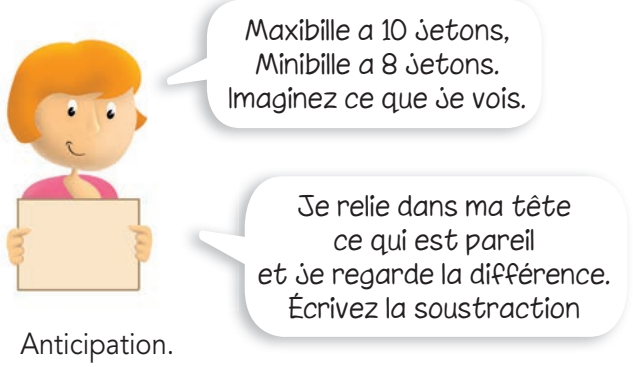
Ces cartons permettent d'animer les situations d'anticipation de la comparaison de deux collections par correspondance terme à terme.



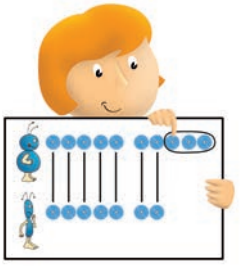




Exemple : 10 – 8



Anticipation.



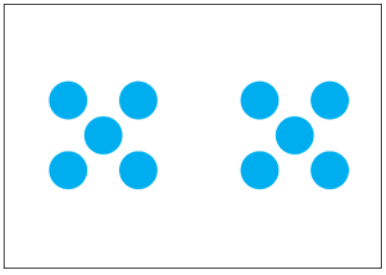
Validation

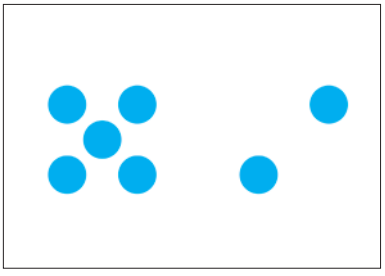
Ce matériel est aussi téléchargeable sur le site compagnon de *J'apprends les maths* (japprendslesmaths.fr).

Des images disponibles en téléchargement…

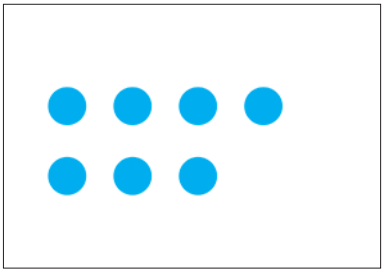
D'autres images sont également téléchargeables sur le site compagnon.
Elles peuvent être collées sur des cartons ou être directement affichées au tableau selon les cas.

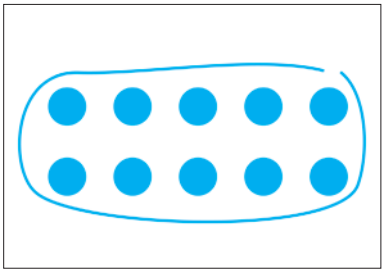
Les nombres « comme Dédé »





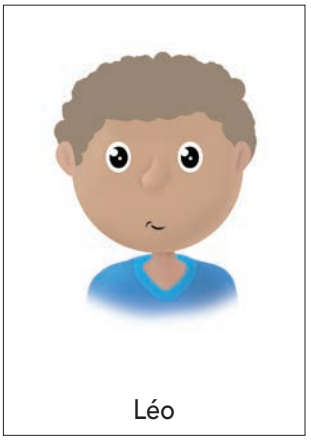
Les nombres « comme Perrine »





Des images des personnages

Nina



Léo

Magibille

Picbille